INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVIII. BAND VIERTES HEFT 1950

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 12.00

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig,** Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor **K. v. Sanden,** Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Braunschweig, Harzburger Straße 8a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Vertriebsvertretungen des Verlages im Ausland:

Schweiz ..... Lange, Maxwell & Springer A.G., Basel, Schützenmattstraße 43
Frankreich ..... Lange, Maxwell, Springer S.A., 24. Rue des Ecoles, Paris (Ve)
England, USA. und übriges Ausland Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Stefaniak, H. St., Ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der Zeitkonstanten und der Schwingungsdauer eines linearen Systems dritter Ordnung. Mit 8 Textabbildungen 221

Truckenbrodt, E., Ein einfaches Verfahren zur Berechnung des Abwindes von Tragflächen. Mit 7 Textabbildungen 233

Sauer, R., Ausbreitungsgesetze schwacher Verdichtungsstöße in Gasen. Mit 3 Textabbildungen 239

Swida, W., Berechnung eines statisch unbestimmt gestützten und senkrecht zu seiner Ebene beliebig belasteten geschlossenen Kreisringes. Mit 10 Textabbildungen 242

Grammel, R., Tafeln der verallgemeinerten Kreisfunktionen. Mit 1 Textabbildung 250

Weissinger, J., Die Berechnung der Auftriebsverteilung elastisch verdrehbarer Tragflügel. Mit 6 Textabbildungen 255

Jung, H., Über eine Anwendung der Fouriertransformation in der Elastizitätstheorie. Mit 7 Textabbildungen 263

Schrenk, O., Gasströmung konstanten Querschnitts mit Wärmezufuhr. Mit 3 Textabbildungen 272

Rotta, J., Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen. Mit 4 Textabbildungen 277

INGENIEUR-ARCHIV

XVIII. BAND VIERTES HEFT 1950

Ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der Zeitkonstanten und der Schwingungsdauer eines linearen Systems dritter Ordnung*.

Von H. St. Stefaniak.

1. Einleitung. In der Regeltechnik sieht man sich manchmal vor die Aufgabe gestellt, die Eigenfrequenzen eines linearen Systems dritter Ordnung aus den gegebenen Daten, welche oft Funktionen mehrerer Parameter sind, für eine Vielzahl von Fällen numerisch zu berechnen. Die bekannten Verfahren zur Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung dritten Grades sind dann entweder zu zeitraubend oder in ihrem Lösungsgang dem Problem nicht angepaßt. Im folgenden wird eine Methode angegeben, welche beide Nachteile im Rahmen der praktisch erwünschten Genauigkeit vermeidet; dabei ist die Darstellung, ausgehend von einem einfachen mechanischen Problem, auf die Erfordernisse der Regeltechnik zugeschnitten.

2. Beschreibung eines mechanischen Regelkreises dritter Ordnung und Aufstellung der Differentialgleichung. Gegeben sei etwa eine starre Platte vom Trägheitsmoment J, welche auf der einen Seite um die feste Achse 0 drehbar gelagert ist; an der anderen Kante im Abstande l ist sie in H_1 elastisch mittels einer Feder von der Federkonstanten c abgestützt (Abb. 1). Diese Feder ist ihrerseits an dem freien Ende H_2 eines um 0′ drehbaren Stützträgers befestigt. Außerdem ist in H_1 noch eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung von der Dämpfungskonstanten k angebracht. Auf die Platte wirken beliebige zeitlich veränderliche Momente $M = M(t) = \sum r(t)\,P(t)$, welche sie um die Achse 0 zu drehen versuchen. Die Aufgabe bestehe darin, diese Drehungen durch geeignetes selbsttätiges Verschieben des Stützträgers, welches eine Verlängerung oder Zusammendrückung der Feder bewirkt, wieder rückgängig zu machen, so daß die Platte möglichst ständig eine bestimmte Lage, die Sollage, einnimmt. Eine der möglichen Ausführungen, welche die geforderte Bedingung erfüllt, benützt einen linearen astatischen Stellmotor, bei welchem definitionsgemäß[1] der Arbeitspunkt H_2 sich mit einer der Verschiebung des Steuerpunktes proportionalen Geschwindigkeit bewegt. Im vorliegenden Falle wird der Steuerpunkt G mit der Platte und der Arbeitspunkt mit dem einen Federende in H_2 verbunden. Auf diese Weise erhält man einen sog. geschlossenen Regelkreis, welcher von der dritten Ordnung ist, da sich dessen Verhalten, wie gezeigt wird, durch eine Differentialgleichung dritter Ordnung beschreiben läßt.

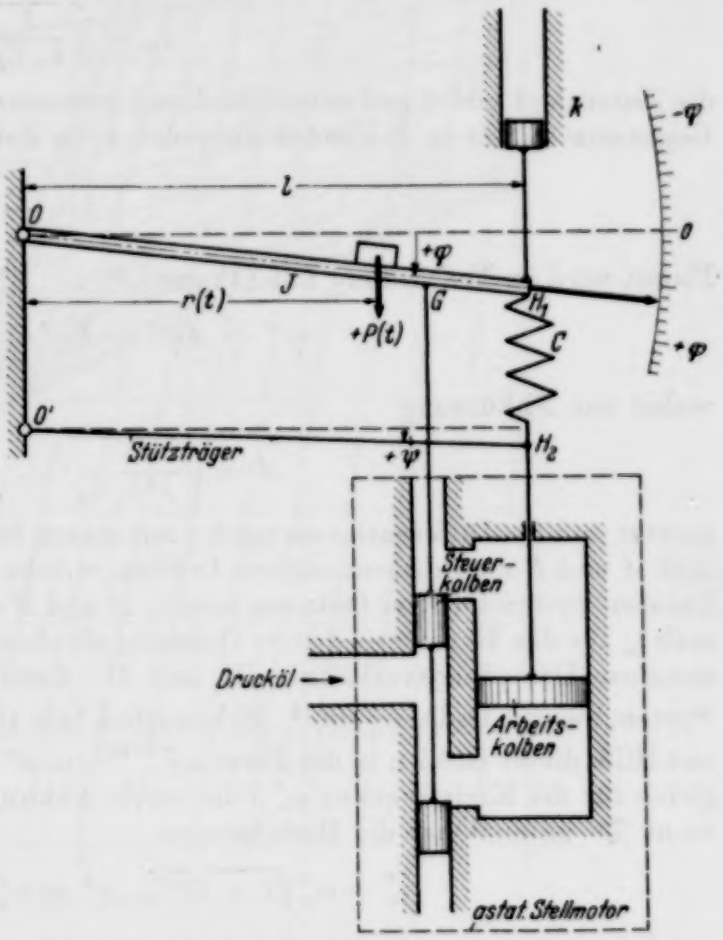


Abb. 1. Einfacher mechanischer Regelkreis dritter Ordnung.

* Diese Veröffentlichung ist eine überarbeitete Fassung des Abschnittes „Verfahren zur Lösung einer Gleichung dritten Grades" aus dem Anhang zur Habilitationsschrift des Verfassers (Techn. Hochsch. München 1944).

Anmerkung bei der Korrektur: Ein einfaches Nomogramm zur Auflösung einer Gleichung dritten Grades findet sich auch bei R. Grammel, Ing. Arch. 12 (1941) S. 175.

[1] *R. C. Oldenbourg* und *H. Sartorius*, Dynamik selbsttätiger Regelungen, S. 93. München u. Berlin 1944.

Zur Ableitung dieser Differentialgleichung betrachtet man das Momentengleichgewicht um 0. Mit $cl^2 = C_2$ und $kl^2 = C_1$ muß sein

$$J\ddot{\varphi} = -C_2\varphi + C_2\psi - C_1\dot{\varphi} + M(t)\,. \tag{1}$$

Außerdem ist voraussetzungsgemäß bei der gegebenen Anordnung ψ groportional $-\varphi$. Das negative Zeichen ergibt sich aus der Forderung, daß diese Anordnung von selbst eine bestimmte Lage der Platte, welche hier mit der Waagerechten übereinstimmen möge, aufrecht erhalten soll. Wird diese um den Winkel $+\varphi$ verdreht, so muß auf sie zusätzlich ein Moment in entgegengesetztem Sinne ausgeübt werden. Dies geschieht durch Verschieben des Punktes H_2 nach oben, d. h. $\dot{\psi}$ muß bei positivem φ negativ sein. Bezeichnet man den Proportionalitätsfaktor mit C_3, so ergibt sich aus

$$\dot{\psi} = -C_3\varphi \tag{2}$$

und (1) nach Differentiieren und Umordnen

$$\dddot{\varphi} + \frac{C_1}{J}\ddot{\varphi} + \frac{C_2}{J}\dot{\varphi} + \frac{C_2 C_3}{J}\varphi = \frac{\dot{M}(t)}{J}\,. \tag{3}$$

Die weiteren Überlegungen kann man nach dem Vorgange von *Wischnegradski*[1] von dem speziellen Ausgangssystem unabhängig machen, indem man eine Zeitkoordinatentransformation einführt. Anschaulich ausgedrückt heißt das: man mißt den Bewegungsablauf statt mit einer nach der Zeiteinheit 1 sec eingeteilten Uhr mit einer solchen, für welche die für das System natürliche Zeit

$$t_m = \sqrt[3]{\frac{J}{C_2 C_3}} = \frac{1}{\lambda_m} \tag{4}$$

die Zeiteinheit bildet und nennt die damit gemessene Zeit die natürliche oder innere Zeit t im Gegensatz zu der in Sekunden ausgedrückten Zeit t. Man setzt also

$$\mathrm{t} = \frac{t}{t_m}\,. \tag{5}$$

Damit wird in Verbindung mit (4) aus (3)

$$\varphi''' + A\varphi'' + B\varphi' + \varphi = \frac{M'(\mathrm{t})}{\sqrt[3]{J C_2^2 C_3^2}}\,, \tag{6}$$

wobei zur Abkürzung

$$A = \sqrt[3]{\frac{1}{J^2 C_2 C_3}}\, C_1\,, \qquad B = \sqrt[3]{\frac{C_2}{C_3^2 J}} \tag{7}$$

gesetzt und die Differentiation nach t mit einem Strich bezeichnet ist. Wie man aus (7) erkennt, sind A und B zwei dimensionslose Größen, welche man die Hauptkonstanten des geregelten linearen Systems dritter Ordnung nennt. A und B erweisen sich in Verbindung mit dem Zeitmaßstab t_m für den Regelkreis dritter Ordnung als ebenso kennzeichnende Größen, wie es das dimensionslose Dämpfungsverhältnis D^* und die Kreisfrequenz ω_0^* für ein gedämpft schwingendes System zweiter Ordnung sind[2]. Bekanntlich läßt sich eine abklingende Schwingung $a e^{-\varrho^* t}\cos\omega_e^* t$ mit Hilfe dieser Größen in der Form $a e^{-D^*\omega_0^* t}\cos\omega^*\sqrt{1 - D^{*2}}t$ darstellen, woraus man durch Vergleich für die Kreisfrequenz ω_e^*, die reelle Abklingkonstante ϱ^* und das logarithmische Dekrement $\mathfrak{D}^*$ unmittelbar die Beziehungen

$$\omega_e^* = \omega_0^*\sqrt{1 - D^{*2}}, \quad \varrho^* = \omega_0^* D^*, \quad \mathfrak{D}^* = \frac{2\pi D^*}{\sqrt{1 - D^{*2}}} \tag{8}$$

entnimmt.

Wenn man die durch $M(\mathrm{t}) = \text{konst.}$ charakterisierte Bewegung betrachtet, so läßt sich das Integral von (6) in den Formen

$$\varphi = \Phi_1 e^{\lambda_1 \mathrm{t}} + \Phi_2 e^{\lambda_2 \mathrm{t}} + \Phi_3 e^{\lambda_3 \mathrm{t}} \tag{9a}$$

oder

$$\varphi = \Phi_1 e^{\lambda_1 \mathrm{t}} + \Phi_{23} e^{\varrho \mathrm{t}} \cos(\omega_e \mathrm{t} + \gamma) \tag{9b}$$

---

[1] *J. Wischnegradski*, Civiling. 23 (1877), S. 95; vgl. auch *E. Lehr*, Schwingungstechnik. Bd. II, S. 324ff. Berlin 1934.

[2] *E. Lehr* ‚Schwingungstechnik, Bd. II, S. 139; *H. Stefaniak*, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 368.

bzw. mit (8) sinngemäß in der Form

$$\varphi = \Phi_1 e^{\lambda_1 t} + \Phi_{23} e^{-\omega_0 D t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - D^2}\, t + \gamma) \tag{9c}$$

angeben, wobei die reellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bzw.

$$\lambda_{2,3} = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2} \pm \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2} = \varrho \pm i\omega_e = \omega_0 \left(-D \pm \sqrt{1 - D^2}\, i\right) \tag{10}$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung dritten Grades

$$F(A, B, \lambda) \equiv \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + 1 = 0 \tag{11}$$

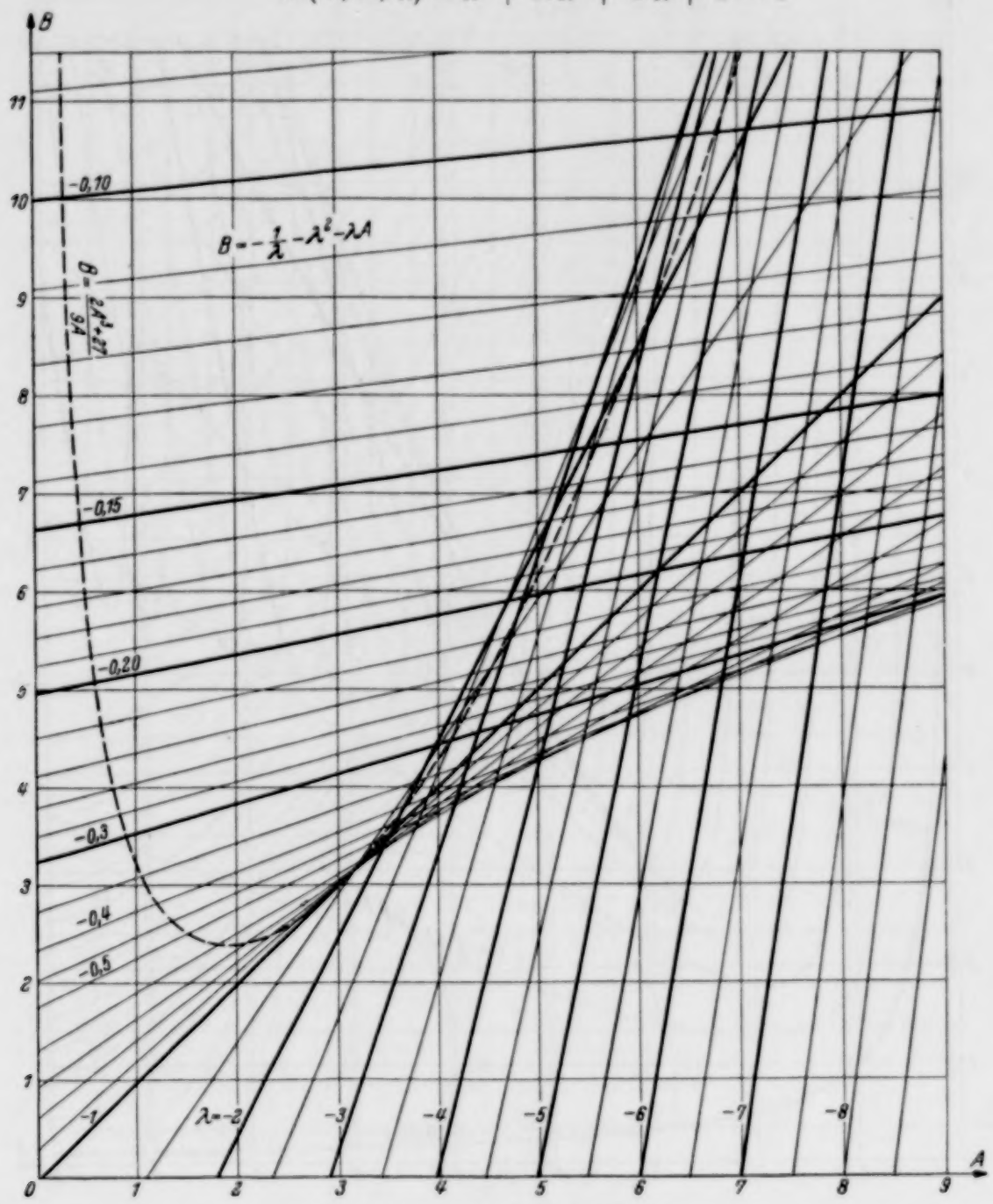


Abb. 2. Linien λ = konst. und Linie $\lambda = \varrho$.

sind. Im Gegensatz zu den entsprechenden mit einem Stern bezeichneten Größen in (8) sind nunmehr λ, ω und ϱ reine Zahlengrößen, d. h. dimensionslos. Zwischen diesen und den Koeffizienten A und B von (11) bestehen bekanntlich die Beziehungen

$$A = -\lambda_1 - (\lambda_2 + \lambda_3) \quad = -\lambda_1 - 2\varrho \qquad = -\lambda_1 + 2D\omega_0, \tag{12a}$$

$$B = \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_2 \lambda_3) = 2\lambda_1\varrho + (\varrho^2 + \omega_e^2) = -2D\omega_0\lambda_1 + \omega_0^2, \tag{12b}$$

$$1 = -\lambda_1(\lambda_2 \lambda_3) \qquad = -\lambda_1(\varrho^2 + \omega_e^2) \quad = -\lambda_1 \omega_0^2. \tag{12c}$$

Man erkennt, daß das Verhalten eines ungestörten Regelkreises dritter Ordnung durch die Angabe zweier voneinander unabhängiger dimensionsloser Größen, der Hauptkonstanten A und B,

eindeutig charakterisiert ist. Diese bilden eine zweifache Mannigfaltigkeit von Zahlen, welche man nach dem Vorgange von *Wischnegradski* in der Ebene eines (A, B)-Koordinatensystems darstellen kann. Jedem Punkt dieser Ebene entsprechen nach (12) bestimmte Werte der Wurzeln λ oder ϱ, ω_e, ω_0 und D und umgekehrt. Bei der letzten Aussage ist allerdings zu beachten, daß man entsprechend der zweifachen Mannigfaltigkeit der möglichen Systeme nur zwei von diesen Größen beliebig vorgeben darf, um einen bestimmten Punkt (A, B) und damit ein bestimmtes Verhalten festzulegen; die übrigen errechnen sich aus (10) und (12c). Wird nun die

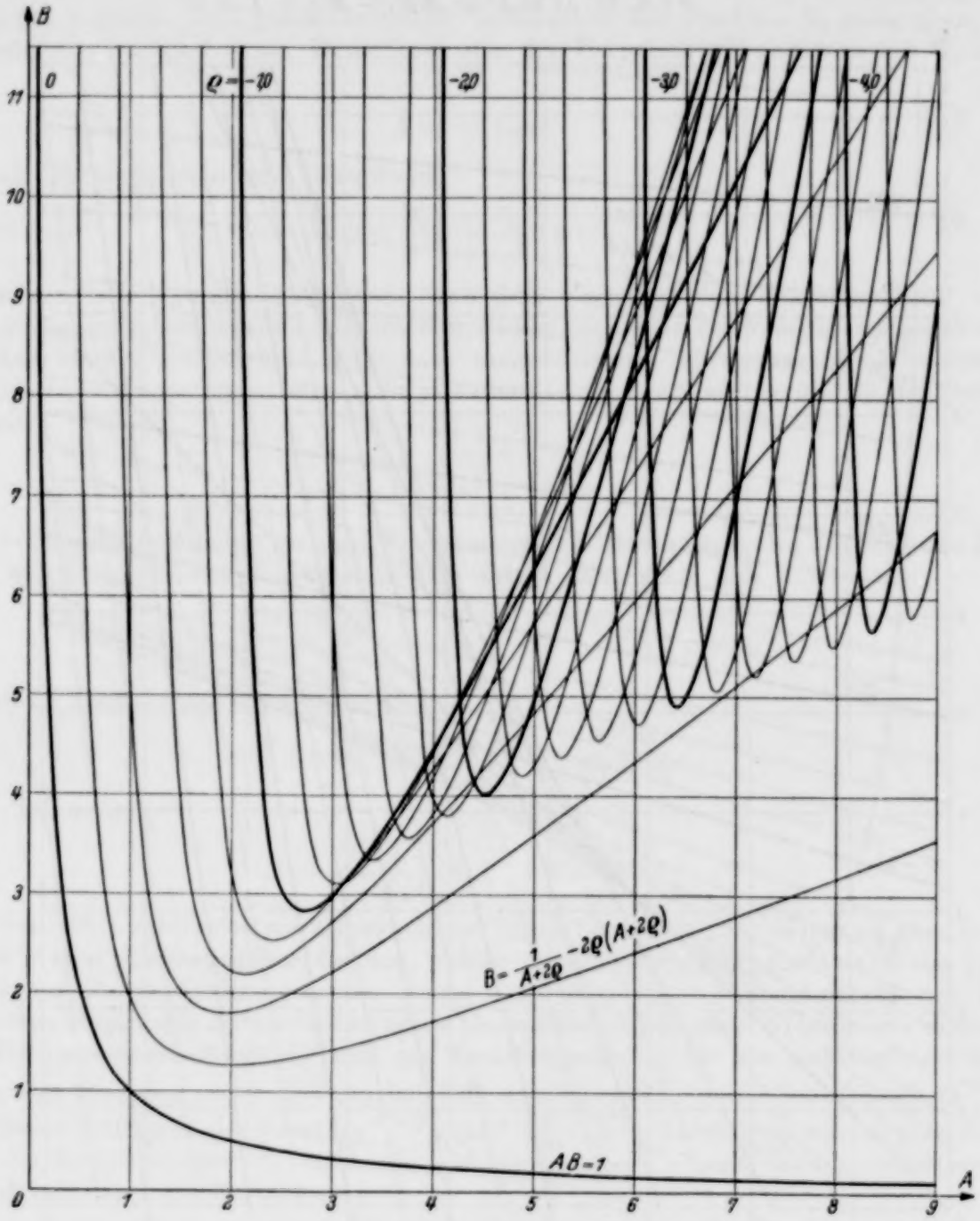


Abb. 3. Linien ϱ = konst.

eine davon als Parameter festgehalten und durchläuft die andere jeweils alle möglichen Werte, so bekommt man in der (A, B)-Ebene eine Kurvenschar, welche die Eigenschaft besitzt, daß längs jeder Kurve die als Parameter gewählte Größe konstant ist. Nachfolgend werden dafür der Reihe nach λ, ϱ, ω_e, ω_0 und D genommen und interessierende Einzelheiten aufgezeigt. Dabei erweist es sich mit Rücksicht sowohl auf das Zeichnen der Kurven als auch auf das anschließend zu erläuternde graphische Verfahren als zweckmäßig, die Kurven nicht nur explizit sondern auch in Parameterform anzugeben.

3a. Linien λ_1 = konst. Die Linien, längs welcher die (reelle) Wurzel λ_1 = konst ist, erhält man aus (12a) bis (12c) durch Elimination der übrigen Wurzeln λ_2, λ_3 in der Form

$$B = -\lambda_1 A - \frac{1}{\lambda_1} - \lambda_1^2, \tag{11a}$$

welche natürlich identisch mit der Ausgangsgleichung (11) ist. Der Tangens des Neigungswinkels α der durch (11a) gegebenen Geraden gegen die A-Achse ist

$$\frac{dB}{dA} = \operatorname{tg}\alpha = -\lambda_1 . \tag{13}$$

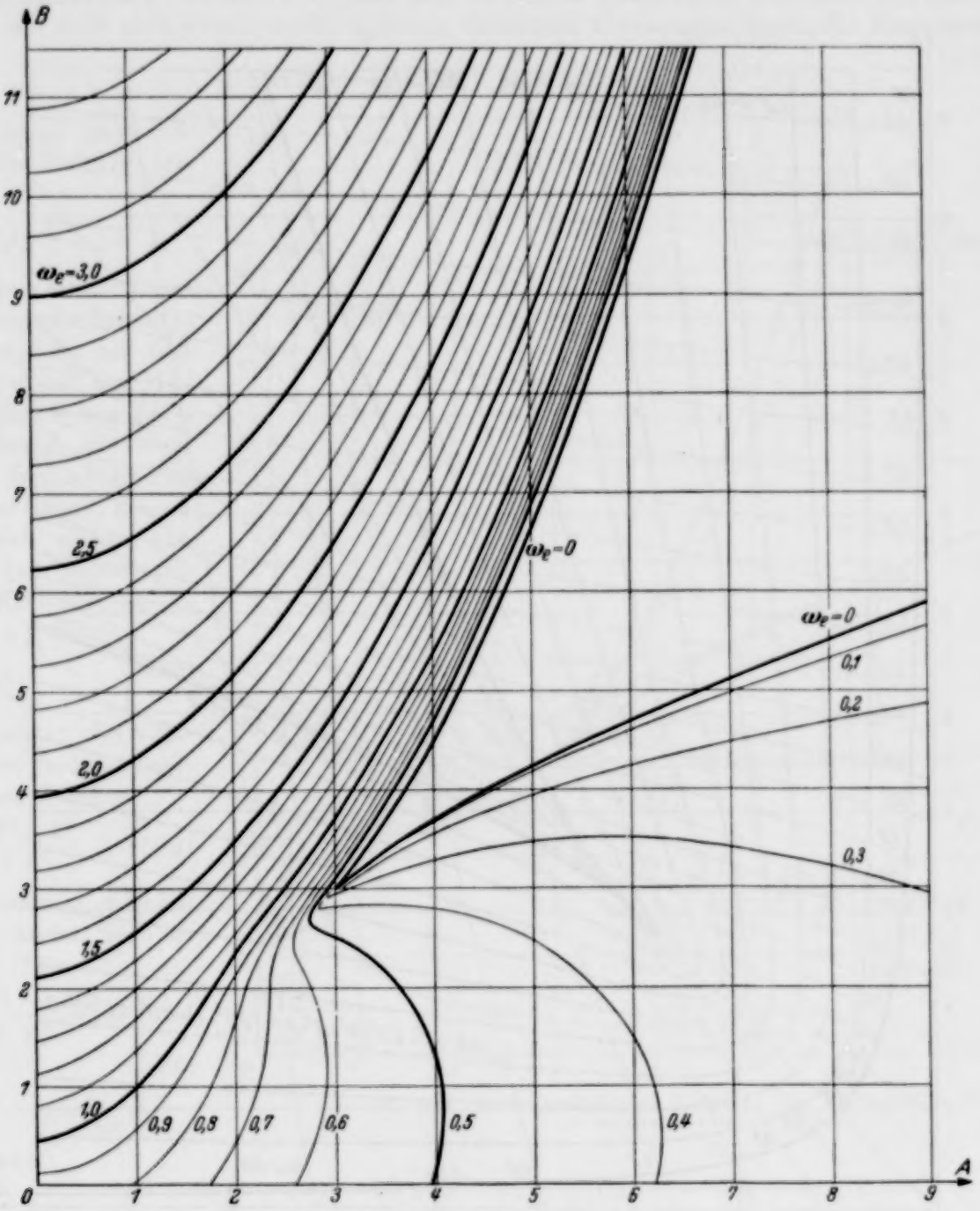


Abb. 4. Linien ω_e = konst.

Die Schar (11a) besitzt eine Einhüllende, deren Koordinaten sowohl der Bedingung (11a)

$$F^*(A, B, \lambda_1) \equiv B + \lambda_1 A + \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_1^2 = 0 \tag{11aa}$$

als auch der Bedingung

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_1} \equiv A - \frac{1}{\lambda_1^2} + 2\lambda_1 = 0 \tag{14}$$

genügen muß. Wie man sich leicht überzeugt, berühren die Geraden (11a) die Einhüllende in Punkten, deren Koordinaten A_3, B_3 man aus (11a) und (14) zu

$$A_3 = \frac{1}{\lambda_1^2} - 2\lambda_1, \qquad B_3 = \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1} \tag{14a}$$

berechnet. Hiermit ist auch die Einhüllende in Parameterform gegeben; explizit lautet deren Gleichung

$$A^2B^2 - 4\,(A^3 + B^3) + 18\,A\,B - 27 = 0\,. \tag{14b}$$

3b. Linien $\varrho = \frac{1}{2}\,(\lambda_2 + \lambda_3) = $ konst. Interessiert man sich für den Ort der Punkte, für welche $\varrho = \frac{1}{2}\,(\lambda_2 + \lambda_3) = $ konst ist, so hat man aus (12a) bis (12c) ω_0 zu eliminieren; man erhält auf

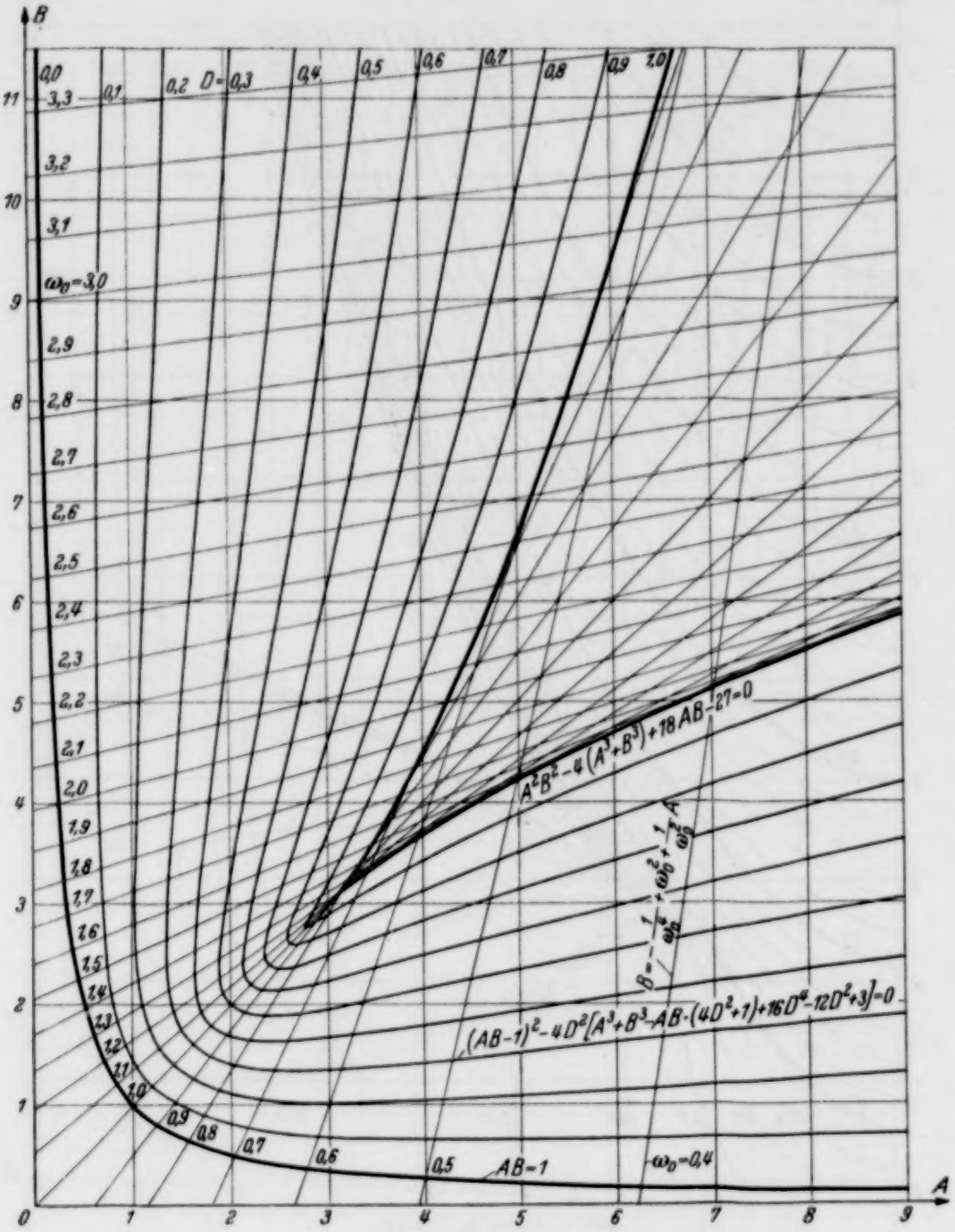


Abb. 5. Linien $\omega_0 = $ konst. und $D = $ konst.

diese Weise die Hyperbeln

$$A = -\lambda_1 - 2\,\varrho\,, \qquad B = \lambda_1\,2\,\varrho - \frac{1}{\lambda_1} \tag{15}$$

in Parameterform und nach Elimination von λ_1 explizit

$$B = \frac{1}{A + 2\,\varrho} - 2\,\varrho\,(A + 2\,\varrho) \tag{15a}$$

mit den Asymptoten

$$A = -2\,\varrho\,, \qquad B = -2\,\varrho\,(A + 2\,\varrho)\,, \tag{16}$$

die sich in den Punkten $B_a = 0$, $A_a = -2\,\varrho$ schneiden. Die Mittelpunkte der Hyperbeln gleiten

daher beim Verändern von ϱ auf der A-Achse entlang. Für das später noch zu erläuternde Verfahren ist es von Wichtigkeit, daß die Abszisse A nach (15) bei konstantem λ_1 sich linear mit ϱ ändert.

Eine ausgezeichnete unter diesen Hyperbeln ergibt sich für $\varrho = 0$, nämlich

$$A\,B = 1\,. \tag{17}$$

Der Schnittpunkt der Geraden (11a) mit dem im ersten Quadranten liegenden Ast der Hyperbel (17) hat, wie man sich durch nachträgliches Einsetzen überzeugen kann, die Koordinaten

$$A_1 = -\lambda_1\,, \qquad B_1 = -\frac{1}{\lambda_1}\,. \tag{18}$$

Von Interesse ist noch der Ort der Punkte, für welche

$$\varrho = \frac{1}{2}\,(\lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1$$

ist, d.i. die Verbindungslinie derjenigen Schnittpunkte A_4, B_4 der Geraden (11a) mit den Hyperbeln der Schar (15), welche durch die vorstehende Bedingung ausgezeichnet sind. Es ergeben sich dafür aus (12a) bis (12c) unmittelbar die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} A_4 &= -3\,\lambda_1\,, \\ B_4 &= 2\,\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\,; \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

explizit lautet die Gleichung der Verbindungslinie dieser Punkte

$$B = \frac{2\,A^3 + 27}{9\,A}\,. \tag{19a}$$

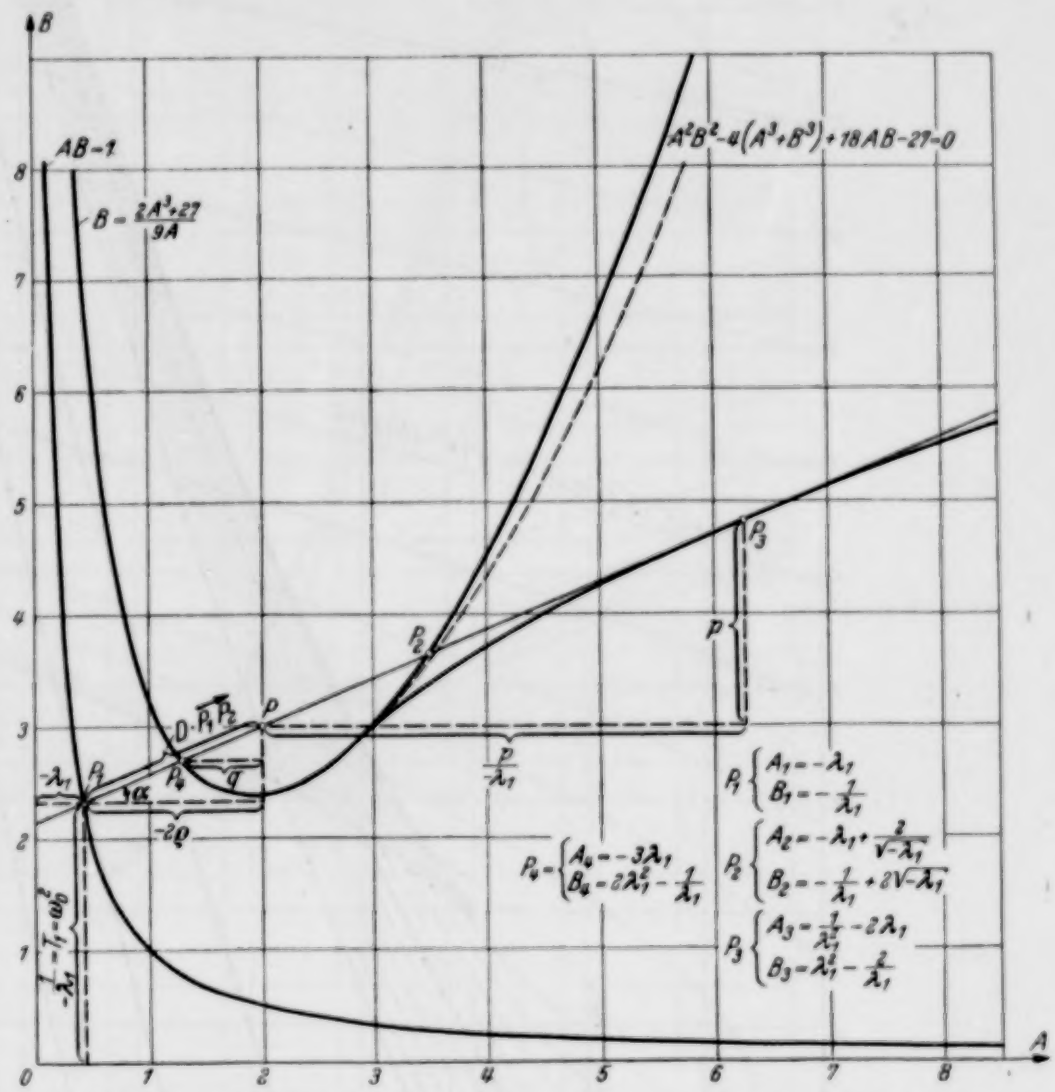


Abb. 6. Diagramm zur nomographischen Auflösung einer algebraischen Gleichung dritten Grades.

3c. Linien ω_e = konst und ω_0 = konst. Man erhält aus (12)

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\varrho^2 + \omega_e^2} - 2\,\varrho\,, \\ B &= \varrho^2 \\ &\quad + \omega_e^2 - \frac{2\,\varrho}{\varrho^2 + \omega_e^2} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

oder explizit

$$A^2B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18\,A\,B - 27 + [2\,\omega_e(A^2 - 3\,B + 4\omega_e^2)]^2 = 0 \tag{20a}$$

bzw.

$$-\frac{1}{(\omega_0^2)^3} + \frac{A}{(\omega_0^2)^2} - \frac{B}{\omega_0^2} + 1 = 0\,. \tag{21}$$

Die Beziehung (21) ist mit (11) identisch, soferne man für $-\lambda_1 = 1/\omega_0^2$ setzt.

3d. Linien D = konst. Es ist mit (12)

$$A = -\lambda_1 + \frac{2\,D}{\sqrt{-\lambda_1}}\,, \qquad B = -\frac{1}{\lambda_1} + 2\,D\sqrt{-\lambda_1} \tag{22}$$

oder explizit

$$(A\,B - 1)^2 - 4\,D^2\,[A^3 + B^3 - A\,B\,(4\,D^2 + 1) + 16\,D^4 - 12\,D^2 + 3] = 0\,. \tag{22a}$$

Aus demselben Grunde wie oben ist es von Wichtigkeit, daß sowohl A als auch B bei festgehaltenem λ_1 linear in D sind. Wie man sich leicht überzeugen kann, erhält man aus (22a) mit $D = 0$

die Hyperbel (17) und mit $D = 1$ die Einhüllende (14b). Diese wird, wie schon gezeigt, von jeder Geraden (11a) in den Punkten A_3 und B_3 tangiert (14a); außerdem wird sie von diesen noch in den Punkten A_2, B_2 geschnitten; es erfüllen nämlich (22) mit $D = 1$ die Koordinaten

$$A_2 = -\lambda_1 + \frac{2}{\sqrt{-\lambda_1}}, \qquad B_2 = -\frac{1}{\lambda_1} + 2\sqrt{-\lambda_1} \tag{23}$$

Gleichung (11a), wobei nunmehr $dB_2/dA_2 = \operatorname{tg}\alpha$ ist.

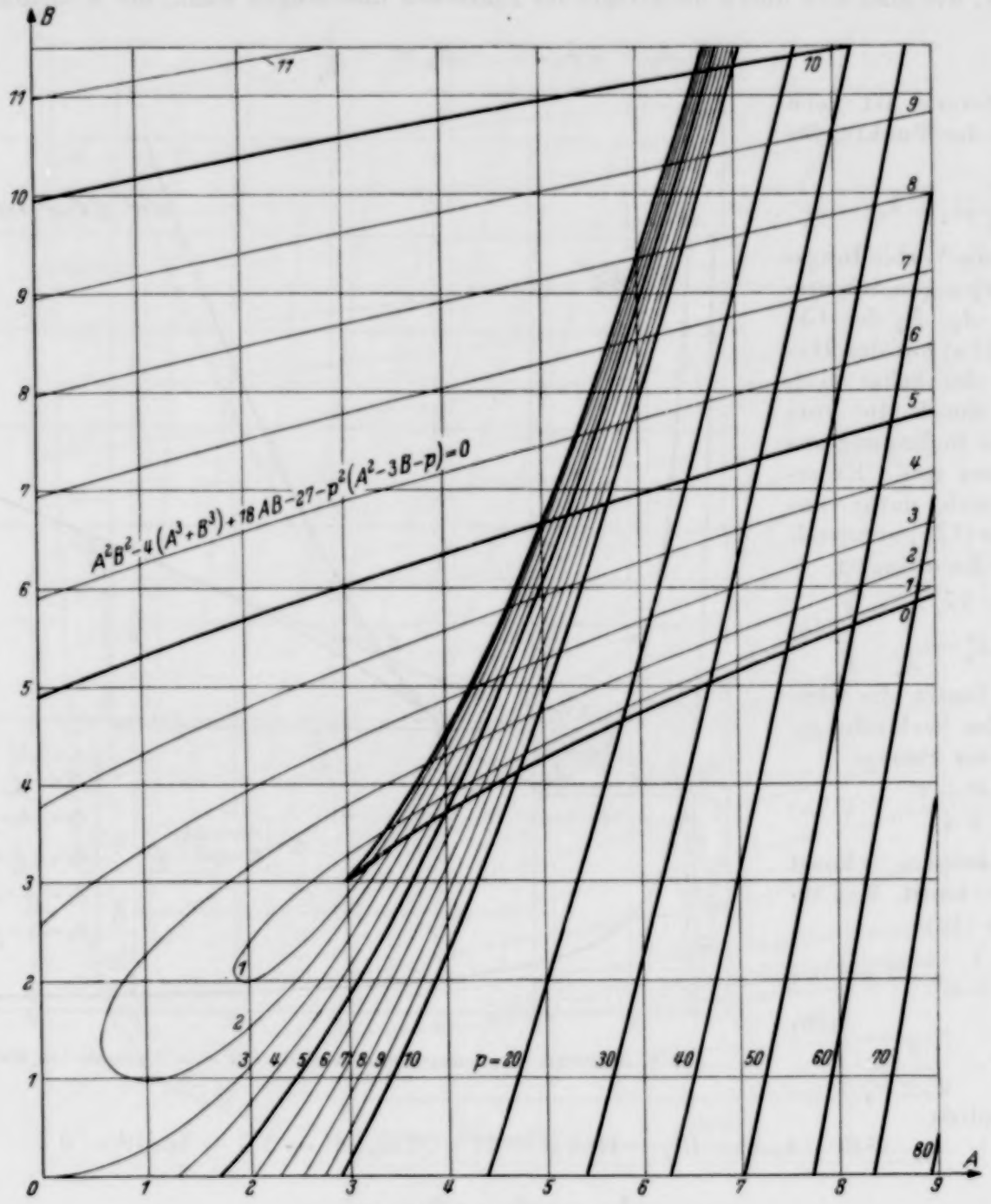


Abb. 7a. Linien p = konst.

Im Interesse der Geschlossenheit und Vollständigkeit der Darstellung sind die Kurven (11a), (14b), (15a), (19a), (20a), (21) und (22a) in den Abb. 2 bis 5 alle wiedergegeben, obwohl einige von ihnen schon an verschiedenen anderen Stellen zu finden sind[1].

4. Diagramm zur nomographischen Auflösung einer algebraischen Gleichung dritten Grades. Man kann aus den Abb. 2 bis 5, sofern ein bestimmtes Wertepaar A, B gegeben ist, sofort oder nach Interpolation alle interessierenden Werte entnehmen. Für die Praxis ist es nun von Vorteil,

[1] *F. Emde*, Tafeln elementarer Funktionen, S. 40. Leipzig 1948; *W. Oppelt*, Arch. Elektrotechn. 37 (1943), S. 217 sowie Grundgesetze der Regelung, S. 89. Wolfenbüttel 1947; *H. Stefaniak*, Bericht 1/1942 des Aerodyn. Labor. Techn. Hochsch. München.

daß man diese auch mit Hilfe eines einzigen vereinfachten Diagrammes (Abb. 6) ermitteln kann, das teilweise zwar schon von *Wischnegradski* angegeben, aber von ihm noch nicht zu diesem Zwecke benutzt wurde. Man benötigt dafür die Grenzhyperbel (17), welche die Gebiete zwischen abklingenden ($D > 0$ oder $\varrho < 0$) und anschwellenden ($D < 0$ oder $\varrho > 0$) Schwingungen trennt und die Kurve (14b), auf welcher einerseits die Punkte mit einer Doppelwurzel liegen, und welche andererseits die Bereiche $D < 1$ und $D > 1$ scheidet. Das Verfahren

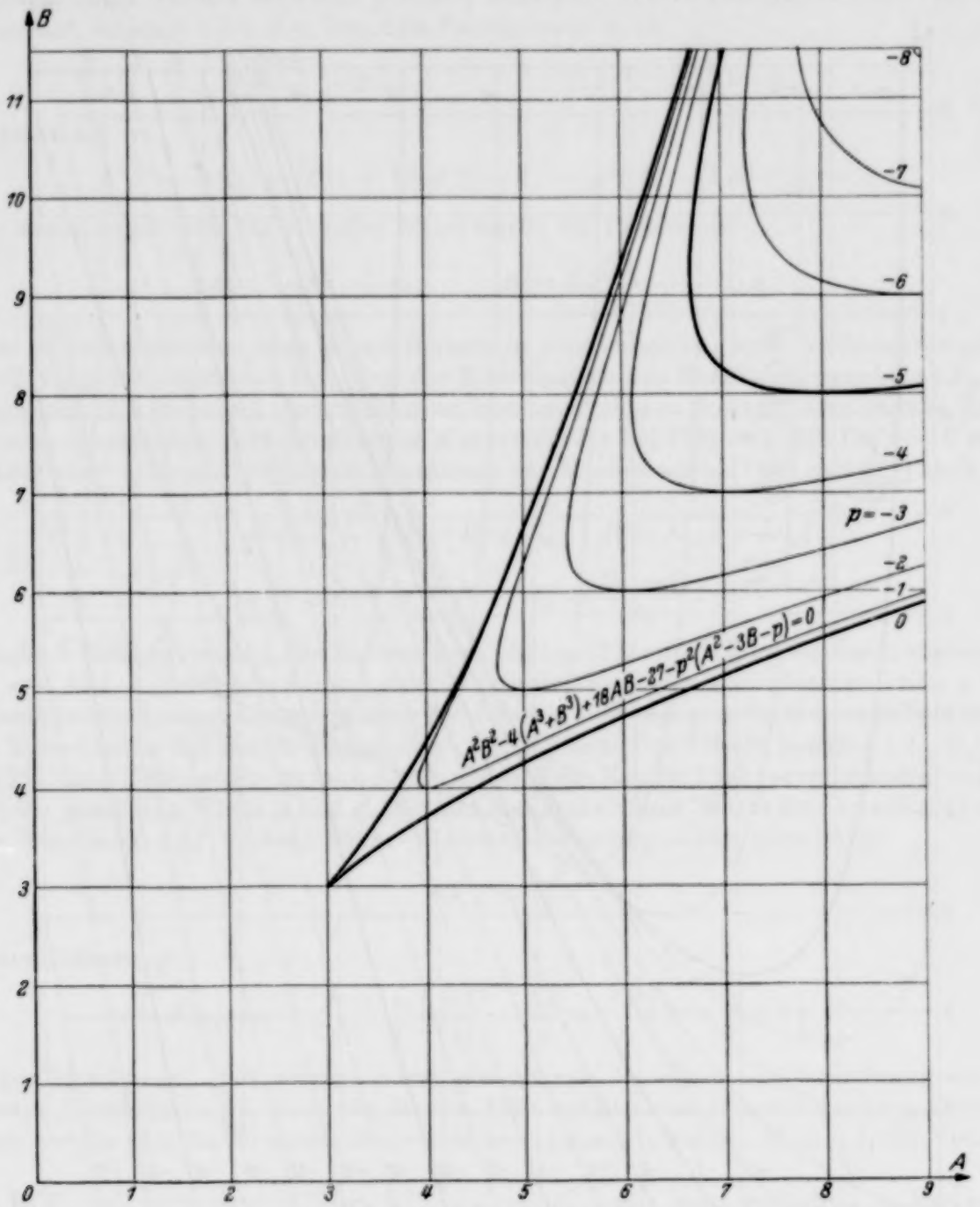


Abb. 7b. Linien p = konst.

besteht darin, daß man den gegebenen Punkt $P(A, B)$ in das Koordinatensystem einträgt, von diesem aus die Tangente (11a) an (14b) legt und deren Schnittpunkte $P_2(A_2, B_2)$ mit (14b) und $P_1(A_1, B_1)$ mit (17) bestimmt. Nach (18) ist die reelle Wurzel $\lambda_1 = -A_1$ (bzw. die Zeitkonstante $\mathfrak{T}_1 = -1/\lambda_1 = B_1$) oder nach (13) $\lambda_1 = -\operatorname{tg}\alpha$. Weiterhin entnimmt man aus (12a) bis (12c) in Verbindung mit (18) und aus (22), (23) und aus Abb. 6, daß

$$-2\varrho = A - A_1, \tag{24a}$$

$$(2D)^2 = (A - A_1)(B - B_1), \tag{24b}$$

bzw.

$$D = \frac{A - A_1}{A_2 - A_1} = \frac{B - B_1}{B_2 - B_1} = \frac{\overrightarrow{P_1 P}}{\overrightarrow{P_1 P_2}} \tag{24c}$$

und

$$\omega_0^2 = B_1 \tag{24d}$$

ist.

Die mit Hilfe dieses Verfahrens erzielbare Genauigkeit dürfte für die meisten Fälle der Praxis ausreichen. Sollte das nicht der Fall sein und aus irgendeinem Grunde der Wunsch nach einer weitergehenden Genauigkeit bestehen, so geht man zweckmäßig so vor, daß man einen Wurzel-

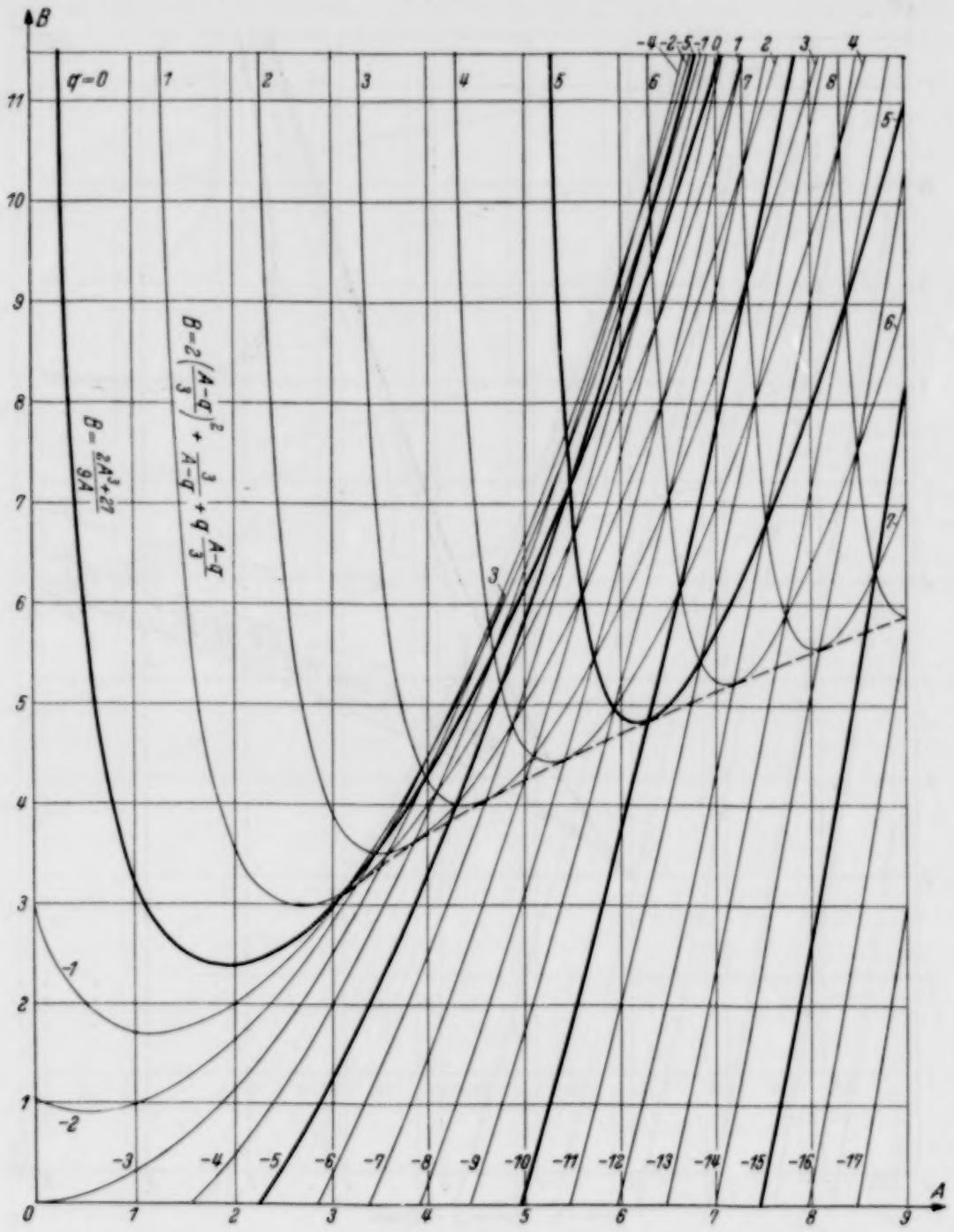


Abb. 8. Linien q = konst.

wert verbessert und damit die übrigen aus (12a bis 12c) errechnet. Es soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe des Diagrammes (Abb. 6) in einfacher Weise einen Schritt näher zum Ziele kommt.

5. Linien $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = p$ = konst und $\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = q$ = konst. Hat man nach dem oben geschilderten Verfahren einen ersten (reellen) Näherungswert λ_1' ermittelt, welcher gegenüber dem wahren Wert λ_1 um $\delta\lambda_1'$ zu groß ausgefallen sein soll, dann wird natürlich (11) nicht befriedigt, sondern es bleibt ein Rest δF, welcher sich aus $\lambda_1' = \lambda_1 + \delta\lambda_1'$ zu

$$\delta F = p\,\delta\lambda_1' + q\,\delta\lambda_1'^2 + \delta\lambda_1'^3 \tag{25}$$

errechnet, wobei man die abkürzenden Bezeichnungen

$$p = 3\lambda_1^2 + 2A\lambda_1 + B \text{ und } q = 3\lambda_1 + A \tag{26}$$

eingeführt hat $\left(p \text{ bzw. } q \text{ sind natürlich identisch mit } \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \text{ bzw. } \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2}\right)$. Es lassen sich genau wie für die früher berechneten Werte $\varrho, \lambda_1, \omega_e$ usw. auch hier in dem (A, B)-Koordinatensystem Kurven angeben, längs welcher entweder p oder q konstante Werte annehmen. Aus (26) und (11a) berechnen sich diejenigen für $p =$ konst in Parameterform zu

$$A = \frac{1}{\lambda_1^2} - 2\lambda_1 + \frac{p}{\lambda_1}, \qquad B = \lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1} - p \tag{27}$$

oder explizit zu

$$A^2B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 - p^2(A^2 - 3B - p) = 0\,. \tag{27a}$$

Für $q =$ konst ergibt sich auf dieselbe Weise mit λ_1 als Parameter

$$A = -3\lambda_1 + q, \qquad B = 2\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} - \lambda_1 q\,. \tag{28}$$

Auch hier ist bemerkenswert, daß A und B linear in p und auch in q sind, beide bei festgehaltenem λ_1. Durch Vergleich stellt man fest, daß die Koordinaten des Berührungspunktes (A_3, B_3) (14a) mit denen von (27) identisch sind, falls man hier speziell $p = 0$ setzt. Das gleiche Zusammenfallen zweier verschieden charakterisierter Kurven findet bei (19) und (28) für $q = 0$ statt. Man kann daher statt (27) und (28) unter Benutzung der Beziehungen (14a) und (19) auch schreiben

$$p = \left(\lambda_1^2 - \frac{2}{\lambda_1}\right) - B = B_3 - B = \lambda_1(A - A_3)\,, \tag{29a}$$

$$q = A + 3\lambda_1 = A - A_4 = \frac{B_4 - B}{\lambda_1}\,. \tag{29b}$$

Es ist deshalb nicht notwendig, die Kurven der Scharen (27) und (28) zu zeichnen, wie es in Abb. 7a und 7b und Abb. 8 geschehen ist, um daraus unmittelbar oder nach Interpolation p und q zu entnehmen, sondern es genügt, wenn man die durch $p = 0$ und $q = 0$ gekennzeichneten auswählt und die Koordinaten des Berührungspunktes $(A_3\ B_3)$ bzw. des Schnittpunktes (A_4, B_4) feststellt; gemäß (29a) und (29b) entnimmt man aus dem durch die Kurve (19a) vervollständigten Diagramm (Abb. 6) die gesuchten Werte p und q. Mit der Kenntnis dieser Werte ist es nach (25) dann möglich, die Korrekturen $\delta\lambda'$ zu berechnen. Als erste Näherung erhält man dafür

$$\delta\lambda'_{1\,\mathrm{I}} = \frac{\delta F}{p}\,, \tag{30a}$$

als zweite Näherung

$$\delta\lambda_{1\,\mathrm{II}} = -\frac{p}{2q} \overset{+}{(-)} \sqrt{\left(\frac{p}{2q}\right)^2 + \frac{\delta F}{q}} \approx \frac{\delta F}{p}\left(1 - \frac{q}{p^2}\delta F\right), \tag{30b}$$

welche genügend genau sind, solange p und q nicht von derselben Größenordnung wie die zu errechnenden Korrekturen $\delta\lambda'_1$ sind. In diesem Falle müßte man von der exakten Gleichung (25) ausgehen, welche aber die Kenntnis des erst zu berechnenden wahren Wertes λ_1 zur Voraussetzung hätte.

Mit Hilfe des verbesserten Wertes $\lambda''_1 = \lambda'_1 - \delta\lambda'_1$ kann man natürlich in Fortsetzung des Verfahrens beliebig nahe an den wahren Wert λ_1 herankommen. Es erweist sich dabei als zweckmäßig, in (30a) das aus (29a) mit Hilfe des genaueren Wertes λ''_1 sich ergebende p einzusetzen.

Hat man λ_1 genügend genau bestimmt, so ermittelt man die übrigen Größen mit Hilfe von (12a) bis (12c) zu

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= -\frac{A + \lambda_1}{2}\,, \quad \omega_e = \sqrt{\frac{-1}{\lambda_1} - \left(\frac{A + \lambda_1}{2}\right)^2}\,, \quad D = \frac{A + \lambda_1}{2}\sqrt{-\lambda_1}\,, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}\,, \\ \lambda_{23} &= -\frac{A + \lambda_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} + \left(\frac{A + \lambda_1}{2}\right)^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Die auf diese Weise errechneten Wurzeln erscheinen als dimensionslose Größen. Um zu den dimensionsbehafteten zurückzukehren, hat man nach (5) für die Zeitgrößen

$$t = t_m\,\mathrm{t} \tag{32a}$$

und für die reziproken Zeitgrößen nach (4) sinngemäß

$$\lambda^* = \lambda_m \lambda \quad \text{bzw.} \quad \omega^* = \lambda_m \omega \tag{32b}$$

zu setzen.

Damit ist das Problem der Bestimmung der charakteristischen Daten der freien Bewegung eines linearen Systems dritter Ordnung mit Hilfe des Diagrammes Abb. 6 in einfacher Weise gelöst.

(Eingegangen am 20. August 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *H. Stefaniak*, München 2, Walter-v.-Dyck-Platz 1.

Ein einfaches Verfahren zur Berechnung des Abwindes von Tragflächen.

Von E. Truckenbrodt.

1. Einleitung. Die Berechnung der induzierten Abwärtsgeschwindigkeit an einem beliebigen Ort in der Umgebung einer tragenden Linie, ist eine Aufgabe, die durch das *Biot-Savart*sche Gesetz grundsätzlich gelöst wird. Die praktische Ausrechnung der dabei auftretenden Integrale ist jedoch recht mühsam. Im Schrifttum sind deshalb mehrere Verfahren angegeben worden, welche die Ausrechnung der Abwind-Integrale vereinfachen sollen. Zuerst veröffentlichte H. *Multhopp*[1] im Anschluß an seine bekannte Arbeit zur Berechnung der Auftriebsverteilung[2] ein Verfahren zur Abwindermittlung, das als ein mechanisches Quadratur-Verfahren charakterisiert werden kann. Es liefert, nachdem die Auftriebsverteilung längs Spannweite ermittelt worden ist, durch weitere Quadraturen die Verteilung der Abwärtsgeschwindigkeit längs Spannweite in der Wirbelschicht für einen beliebigen Abstand von der tragenden Linie.

Später ist dieses *Multhopp*sche Rechenverfahren, das sich in der praktischen Durchführung noch als ziemlich mühsam erwies, von *G. Braun* und *H. Scharn*[3] durch Berechnung von Kurven-Tafeln weiter vereinfacht worden.

In der vorliegenden Note soll nun ein Verfahren zur Berechnung des Abwindes mitgeteilt werden, welches das Problem soweit vereinfacht, daß überhaupt keine Arbeit mehr übrigbleibt, die über das hinausgeht, was bei der Berechnung der Auftriebsverteilung ohnehin gerechnet werden muß. Allerdings ist das hier angegebene vereinfachte Verfahren nur anwendbar für Abstände von der tragenden Linie, die größer als die Halbspannweite sind, was aber für die meisten praktischen Fälle ausreichend ist.

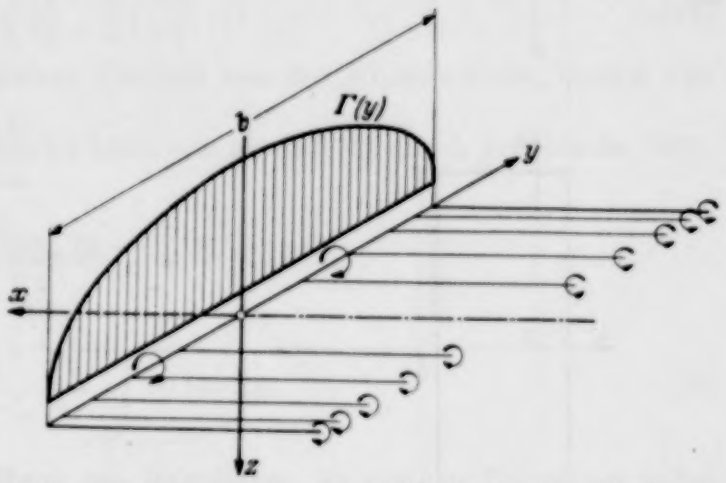


Abb. 1. Erläuterungsskizze: Zirkulationsverteilung längs Spannweite.

2. Ableitung der Näherungsformel. Auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes erhält man (vgl. z. B. *Multhopp* a. a. O.) für die in einem Punkt (x, y, z) induzierte Abwärtsgeschwindigkeit einer geraden tragenden Linie mit der Zirkulationsverteilung $\Gamma(\eta)$ (Abb. 1)

$$\left.\begin{aligned}\frac{w(\xi,\eta,\zeta)}{V} = \alpha_w(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\gamma(\eta')\left\{\frac{(\zeta-\zeta_1)^2-(\eta-\eta')^2}{[(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2]^2}\cdot\left[1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2}}\right]-\right.\\ \left.-\frac{(\zeta-\zeta_1)^2}{(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2}^3}\right\}d\eta'\,.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hierbei bedeuten $\xi = x\Big/\frac{b}{2}$, $\eta = y\Big/\frac{b}{2}$, $\zeta = z\Big/\frac{b}{2}$ die mit der Halbspannweite dimensionslos gemachten flügelfesten Koordinaten, $\zeta_1(\xi,\eta)$ die Lage der Wirbelfläche (Abb. 2) und $\gamma(\eta) = \Gamma(\eta)/Vb$ die dimensionslose Zirkulation.

Wir wollen die Abwärtsgeschwindigkeit in größerer Entfernung vor bzw. hinter der tragenden Linie berechnen, für Punkte in der Nähe der Wirbelschicht. Dann ist $\xi^2 \gg (\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2$. Entwickelt man den Klammerausdruck in (1) in eine Reihe, dann erhält man unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung

$$\left.\begin{aligned}\left\{\right\} &= \frac{(\zeta-\zeta_1)^2-(\eta-\eta')^2}{[(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2]^2}\left[1-\frac{\xi}{|\xi|}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2}{\xi^2}+\ldots\right)\right]-\\ &\quad-\frac{(\zeta-\zeta_1)^2}{(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2}\,\frac{\xi}{|\xi|^3}\,(1-\ldots)\\ &= \left(1-\frac{\xi}{|\xi|}\right)\frac{(\zeta-\zeta_1)^2-(\eta-\eta')^2}{[(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2]^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\xi}{|\xi|^3}\,.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

[1] *H. Multhopp*, Luftfahrtforschung 15 (1938), S. 463. [2] *H. Multhopp*, Luftfahrtforschung 15 (1938), S. 153. [3] *G. Braun* und *H. Scharn*, Luftfahrtforschung 18 (1941), S. 179.

In (1) eingesetzt, ergibt sich dann

$$\alpha_w(\xi,\eta,\zeta)=\left(1-\frac{\xi}{|\xi|}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\gamma(\eta')\,\frac{(\zeta-\zeta_1)^2-(\eta-\eta')^2}{[(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2]^2}\,d\eta'-\frac{\xi}{|\xi|^3}\,\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\gamma(\eta')\,d\eta'\,. \tag{3}$$

Das erste, mit $1/2\pi$ multiplizierte Integral stellt den induzierten Abwindwinkel in der Flügel-Querebene ($\xi=0$) dar:

$$\alpha_w(0,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\gamma(\eta')\,\frac{(\zeta-\zeta_1)^2-(\eta-\eta')^2}{[(\zeta-\zeta_1)^2+(\eta-\eta')^2]^2}\,d\eta'\,. \tag{4}$$

Das zweite Integral bildet die Integration der Zirkulationsverteilung über der Spannweite. Nach *Kutta-Joukowsky* ist der Gesamtauftrieb $A=\varrho V\int_{-b/2}^{+b/2}\Gamma(y)\,dy$, und somit wegen $A=c_a\,\frac{\varrho}{2}\,V^2F$ und mit $\Lambda=\frac{b^2}{F}$

$$c_a=\Lambda\int_{-1}^{1}\gamma(\eta')\,d\eta'\,. \tag{5}$$

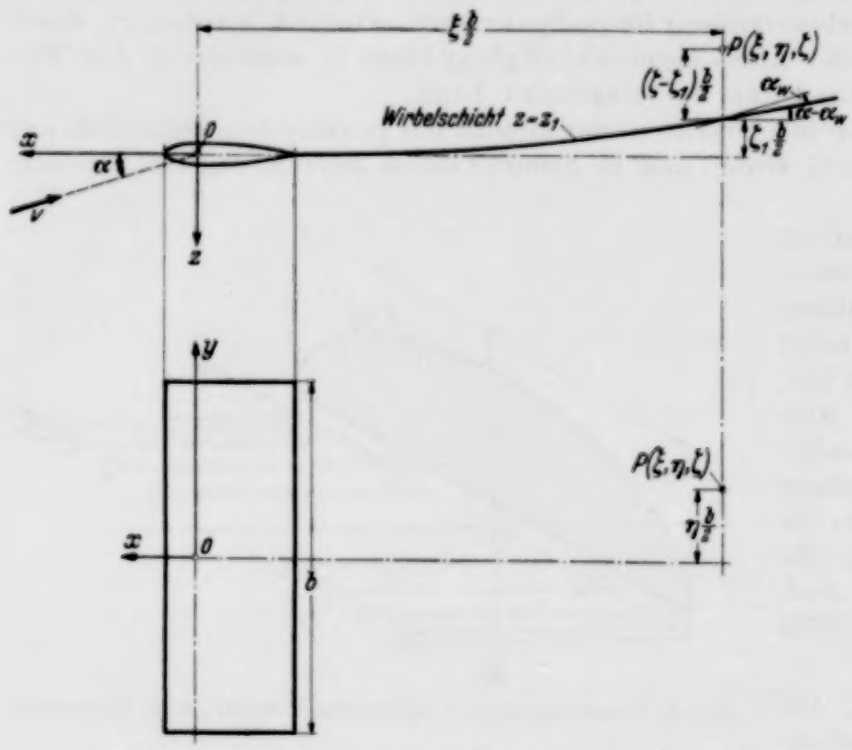


Abb. 2. Das Koordinatensystem für die Berechnung des Abwindes.

Man kann also für (3) schreiben

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_w(\xi,\eta,\zeta)\\&\quad=\left(1-\frac{\xi}{|\xi|}\right)\alpha_w(0,\eta,\zeta)\\&\quad-\frac{1}{4}\,\frac{\xi}{|\xi|^3}\,\frac{c_a}{\pi\Lambda}\,.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Zur Berechnung von $\alpha_w(0,\eta,\zeta)$ wird auf Abschn. 3 verwiesen.

Aus (6) kann man im Einzelnen folgern:

1. Die Abwinde weit vor dem Flügel ($\xi>0$) sind in Spannweiten- und Höhenrichtung konstant. Sie hängen nur vom Gesamtauftrieb des Flügels ab, dagegen nicht von der Auftriebsverteilung.

2. Die Abwinde weit hinter dem Flügel ($\xi<0$) sind bis auf das weniger stark ins Gewicht fallende konstante Glied $(1/4\,\xi^2)\,(c_a/\pi\Lambda)$ gleich dem doppelten Wert des in der Flügelquerebene herrschenden Abwindes.

Für Punkte innerhalb der Wirbelschicht ($\zeta=\zeta_1$) erhält man

$$\alpha_w(\xi,\eta,\zeta_1)=\left(1-\frac{\xi}{|\xi|}\right)\alpha_w(0,\eta,\zeta_1)-\frac{1}{4}\,\frac{\xi}{|\xi|^3}\,\frac{c_a}{\pi\Lambda}\,. \tag{7}$$

Für Punkte innerhalb der Spannweite $|\eta|<1$ stellt $\alpha_w(0,\eta,\zeta_1)=\alpha_i(\eta)$ den nach *Prandtl* bekannten induzierten Anstellwinkel dar.

Die Lage der Wirbelschicht hinter dem Flügel errechnet man nach der Formel

$$\zeta_1(\xi,\eta)=\int_{\xi_h(\eta)}^{\xi}[\alpha(\eta)-\alpha_w(\xi',\eta,\zeta_1)]\,d\xi', \tag{8}$$

wobei $\alpha(\eta)$ den Anstellwinkel des Schnittes η gegen die Anströmrichtung bedeutet.

An der Hinterkante (ξ_h) muß, damit die Abflußbedingung erfüllt ist, $\alpha(\eta)-\alpha_w(\xi_h,\eta,\zeta_1)=0$ sein. Es dürfte genau genug sein, wenn man das Anwachsen des Wertes $\alpha(\eta)-\alpha_w(\xi',\eta,\zeta_1)$ über ξ' linear bis zur Stelle $\xi'=\xi$ annimmt. Unter Vernachlässigung des zweiten Glieder in (7) ergibt sich dann

$$\zeta_1(\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\,[\alpha(\eta)-2\alpha_i(\eta)]\,[\xi-\xi_h(\eta)]^2\,. \tag{8a}$$

Im Gebiet vor und seitlich vom Flügel ($\xi>0$, η beliebig und $\xi<0$, $|\eta|>1$) ist $\zeta_1\equiv 0$ zu setzen.

3. Berechnung des induzierten Abwindwinkels am Ort des Flügels. Die wichtigste Größe in den Formeln (6) und (7) stellt der induzierte Abwind am Ort des Flügels dar, $\alpha_w\ (0, \eta, \xi)$. Der Abwind in der Wirbelschicht ist nach (4)

$$\alpha_w\,(0, \eta, \zeta_1) = \operatorname*{Lim}_{\zeta \to \zeta_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta')\, \frac{(\zeta - \zeta_1)^2 - (\eta - \eta')^2}{[(\zeta - \zeta_1)^2 + (\eta - \eta')^2]^2}\, d\eta' \,. \tag{9}$$

Liegt der Aufpunkt außerhalb der Flügelspannweite ($|\eta_1| > 1$), so läßt sich (9) in einfacher Weise auswerten. Liegt jedoch der Aufpunkt innerhalb der Spannweite ($|\eta_1| < 1$), so erfordert die Berechnung von (9) die Ermittlung des *Cauchy*schen Hauptwertes. Für die numerische Rechnung verwendet man am besten die von *Multhopp* angegebene Quadraturformel

$$\alpha_w(0, \eta, \zeta_1) = \alpha_i\,(\eta_\nu) = b_{\nu\nu}\,\gamma(\eta_\nu) - \sum_1^m{}' b_{\nu n}\,\gamma(\eta_n) \,. \tag{10}$$

Dabei sind $b_{\nu\nu}$, $b_{\nu n}$ feste Zahlen, die von *Multhopp* ein für allemal berechnet wurden. Die Änderung des Abwindes in der Nähe der Wirbelschicht wurde schon von *Multhopp* untersucht und lieferte das einfache Ergebnis

$$\frac{d\,\alpha_w}{d\,\zeta}\,(0, \eta, \zeta_1) = \frac{1}{2}\,\frac{\zeta - \zeta_1}{|\zeta - \zeta_1|}\,\frac{d^2\gamma}{d\,\eta^2}\,(\eta) \,. \tag{11}$$

Die Kurve des Abwindes α_w, aufgetragen über dem Abstand von der Wirbelschicht, besitzt also in der Wirbelschicht eine Spitze (Abb. 5).

Der Abwind außerhalb der Wirbelschicht läßt sich gemäß (4) durch graphische Integration ermitteln. Macht man die Substitution

$$u = -\,\frac{(\zeta - \zeta_1)\,(\eta - \eta')}{(\zeta - \zeta_1)^2 + (\eta - \eta')^2} \,, \qquad -\frac{1}{2} \le u \le \frac{1}{2} \,,$$

so kann man (4) auch in der Form schreiben

$$\alpha_w\,(0, \eta, \zeta) = \frac{1}{\zeta - \zeta_1}\,\frac{1}{2\pi} \int_{u(\eta' = -1)}^{u(\eta' = 1)} \gamma\,(u)\,du \,. \tag{12}$$

4. Nachprüfung der Näherungsformel an Hand von Beispielen. An einigen Beispielen sollen die Brauchbarkeit und die Grenzen der in 2 abgeleiteten Näherungsformeln untersucht werden.

Um die exakte Integration der Gleichung (1) einfacher ausführen zu können, kann man (1) auch folgendermaßen schreiben:[1]

$$\alpha_w\,(\xi, \eta, \zeta) = -\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial\,\zeta} \int_{-1}^{1} \gamma(\eta')\,\frac{\zeta - \zeta_1}{(\zeta - \zeta_1)^2 + (\eta - \eta')^2} \left[1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 + (\eta - \eta')^2}}\right] d\,\eta' \,. \tag{13}$$

Vorerst werden die exakten Formeln und die Näherungsformeln abgeleitet und dann wird im Anschluß daran ein Vergleich zwischen beiden Formeln gegeben.

a) Konstante Zirkulationsverteilung. Nimmt man die Zirkulationsverteilung konstant über der Spannweite an, so ergibt sich das als „Hufeisenwirbel" bezeichnete Wirbelsystem. In Übereinstimmung mit (5) ist

$$\gamma(\eta') = \frac{c_a}{\pi\,\Lambda}\,\frac{\pi}{2} \,. \tag{14}$$

Die Integration von (13) liefert für diesen Fall

$$\left.\begin{aligned} \alpha_w\,(\xi, \eta, \zeta) = -\,\frac{c_a}{\pi\,\Lambda}\,\frac{1}{4}\,\frac{\eta - \eta'}{(\zeta - \zeta_1)^2 + (\eta - \eta')^2} \\ \left[1 - \frac{\xi^2 + 2\,(\zeta - \zeta_1)^2 + (\eta - \eta')^2}{\xi^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 + (\eta - \eta')^2}}\right]_{\eta' = -1}^{1} \,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

[1] Man kann nachweisen, daß der Integralausdruck dem Potential des Flügels gleichwertig ist:

$$\Phi\,(\xi, \eta, \zeta) = -\,\frac{V}{2\pi} \int_{-1}^{1} \ldots\, d\eta' \,.$$

Der kürzeren Schreibweise wegen soll darauf verzichtet werden, die Formel mit den eingesetzten Grenzen hinzuschreiben. Den in der Näherungsformel (6) benötigten Abwindwinkle in der Flügel-Querebene erhält man, wenn man in (15) $\xi = 0$ setzt.

Für den Abwind am Ort des Flügels $\xi = 0$, $\zeta = \zeta_1$ findet man

$$\alpha_i(\eta) = \frac{c_a}{\pi \Lambda} \frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta^2}. \tag{16}$$

b) *Parabolische Zirkulationsverteilung.* Als zweites Beispiel sei eine längs Spannweite parabolische Zirkulationsverteilung gegeben. Gemäß (5) ist

$$\gamma(\eta') = \frac{c_a}{\pi \Lambda} \frac{3\pi}{4} (1-\eta'^2). \tag{17}$$

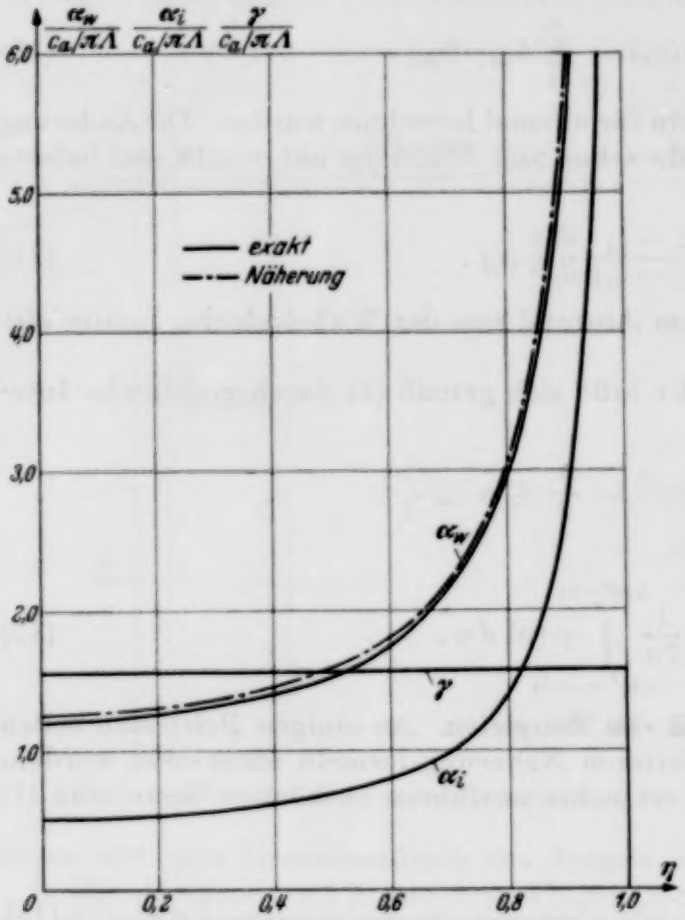


Abb. 3. Abwindverteilung in der Wirbelschicht in der Entfernung $\xi = -1$ hinter dem Flügel bei konstanter Zirkulationsverteilung.

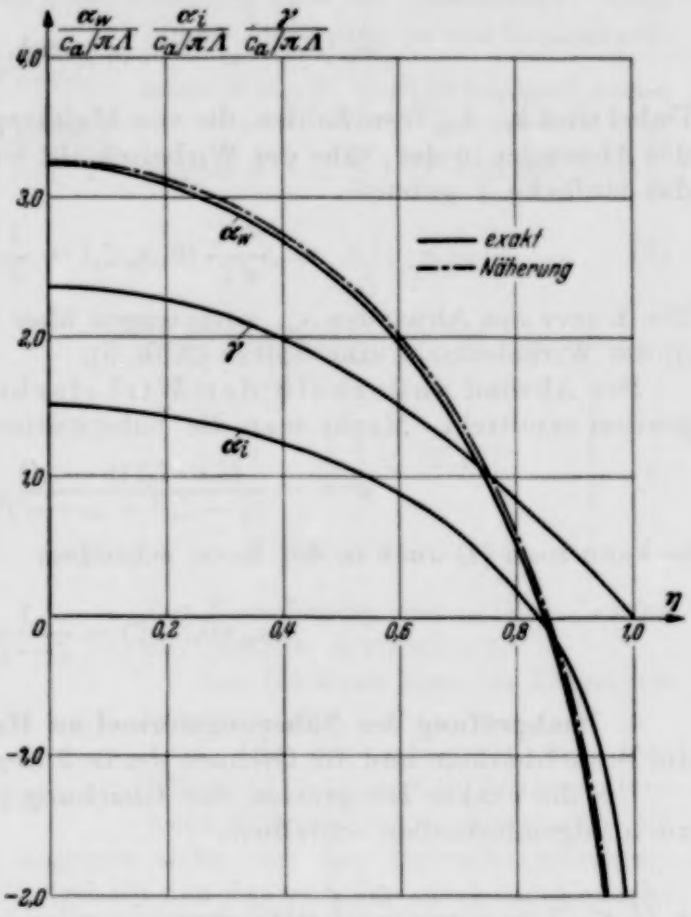


Abb. 4. Abwindverteilung in der Wirbelschicht in der Entfernung $\xi = -1$ hinter dem Flügel bei parabolischer Zirkulationsverteilung.

Die Integration von (13) liefert in diesem Fall einen etwas umständlichen Ausdruck, auf dessen Wiedergabe verzichtet werden möge. Den in der Näherungsformel (7) benötigten Abwindwinkel in der Flügel-Querebene erhält man hieraus für $\xi = 0$ und $\zeta = \zeta_1$ zu

$$\alpha_i(\eta) = \frac{c_a}{\pi \Lambda} \frac{3}{4} \left[2 - \eta \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right]. \tag{18}$$

c) Elliptische Zirkulationsverteilung. Als drittes Beispiel sei die über Spannweite elliptische Zirkulationsverteilung angenommen. Gemäß (5) ist

$$\gamma(\eta') = \frac{c_a}{\pi \Lambda} 2\sqrt{1-\eta'^2}. \tag{19}$$

Die geschlossene Integration für den Abwindwinkel führt auf sehr unübersichtliche Formeln.

Im Folgenden sei lediglich die Abwindverteilung längs der Längsachse ($\xi, \eta = 0, \zeta = \zeta_1$) angegeben, wie sie von *Glauert*[1] mitgeteilt ist, Die exakte Formel lautet

$$\alpha_w(\xi, 0, \zeta_1) = \frac{c_a}{\pi \Lambda} \left[1 - \frac{2}{\pi} E(k) \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\xi} \right]. \tag{20}$$

[1] *H. Glauert*, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie (deutsch von *H. Holl*) S. 148. Berlin (1929).

Hierin bedeutet $E(k)$ das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung mit dem Modul $k = 1/\sqrt{1+\xi^2}$. Für die Näherungsformel gilt wegen $\alpha_i = c_a/\pi\Lambda$

$$\alpha_w(\xi, 0, \zeta_1) = \frac{c_a}{\pi\Lambda}\left[1 - \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{1}{4}\frac{\xi}{|\xi|^3}\right] \qquad (20a)$$

d) Vergleich der Näherungsformel mit der exakten Lösung. Für die konstante Zirkulationsverteilung und die parabolische Zirkulationsverteilung sind in Abb. 3 und 4 die Werte

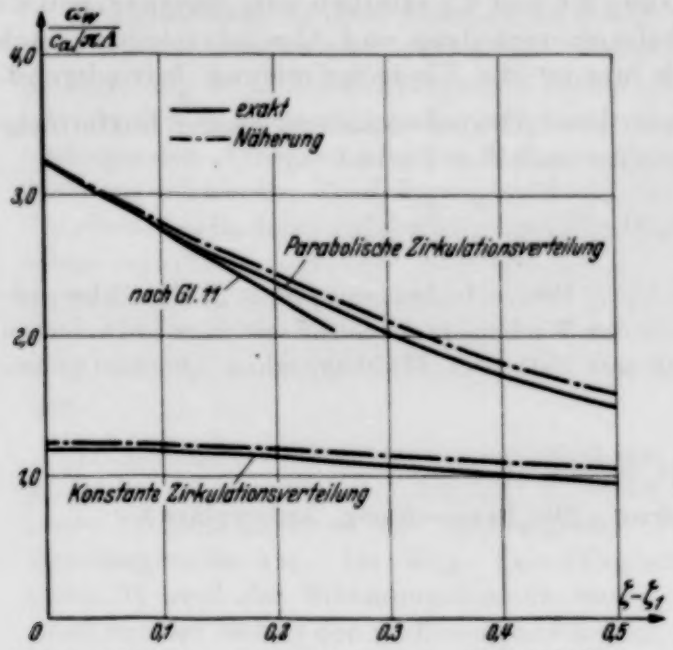


Abb. 5. Abwindverteilung außerhalb der Wirbelschicht in der Flügelsymmetrie-Ebene $\eta = 0$ und der Entfernung $\xi = -1$ hinter dem Flügel.

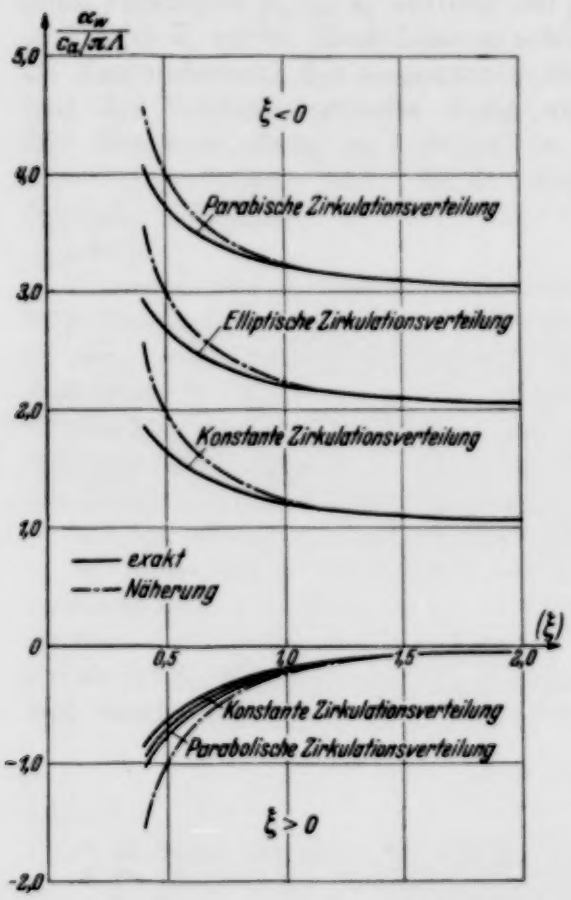


Abb. 6. Abwindverteilung auf der Längsachse $\eta = 0, \zeta = \zeta_1$.

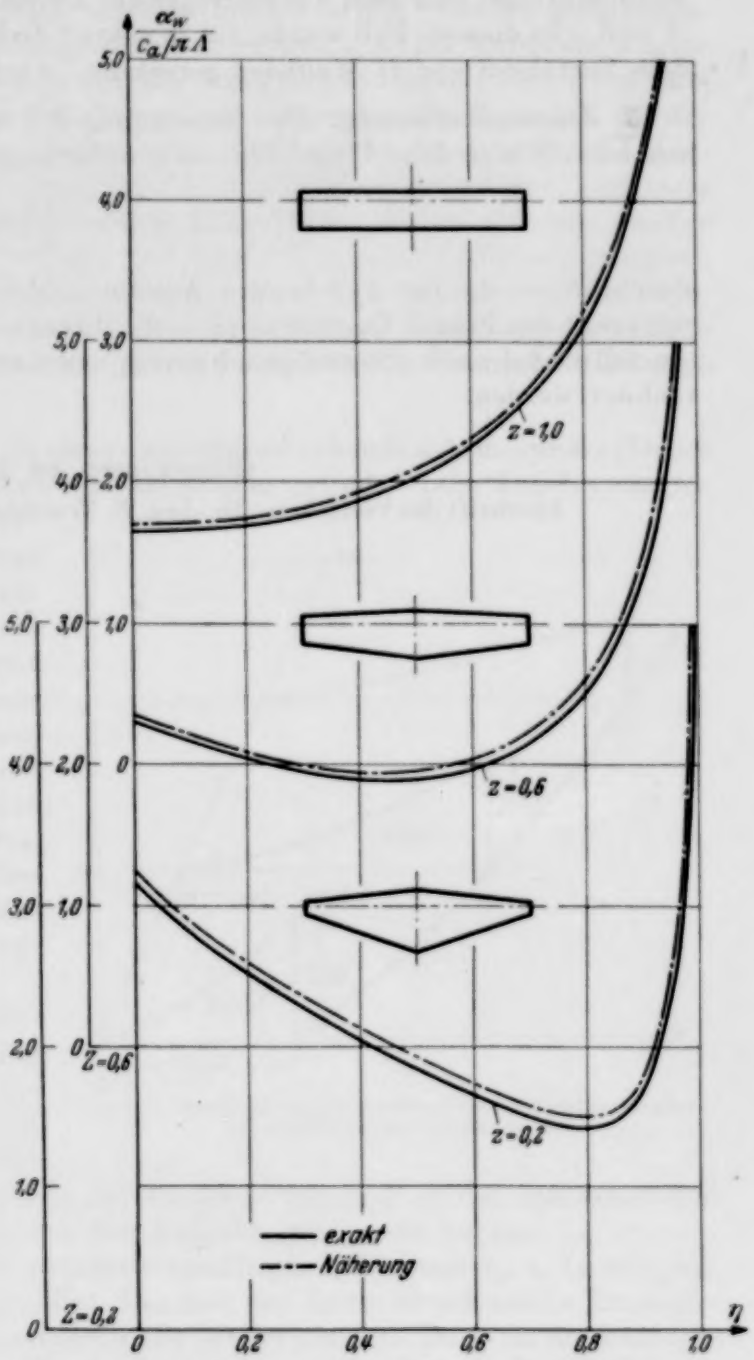


Abb. 7. Abwindverteilung in der Wirbelschicht in der Entfernung $\xi = -1$ hinter dem Flügel für einen Rechteck- und zwei Trapezflügel der Zuspitzung $Z = 0{,}6$ und $Z = 0{,}2$ und dem Seitenverhältnis $\Lambda = 6$.

des Abwindes in der Wirbelschicht im Abstand $\xi = -1$ nach der exakten Lösung und unserer Näherungsformel verglichen. Die Übereinstimmung ist recht befriedigend. Nach unserer Näherung hat man also das einfache Rezept, daß man die Abwindverteilung $\alpha_w(\xi, \eta)$ in der Wirbelschicht erhält, indem man den Abwind $\alpha_i(\eta)$ am Ort der tragenden Linie verdoppelt und den konstanten Betrag $(1/4\,\xi^2)\,(c_a/\pi\Lambda)$ addiert. Der Abwind außerhalb der Wirbelschicht ist für die

konstante und die parabolische Auftriebsverteilung in Abb. 5 dargestellt im Vergleich der exakten Lösung mit unserer Näherung. Auch hier ist die Übereinstimmung recht befriedigend.

Abb. 6 zeigt den Abwind auf der Längsachse ($\eta = 0, \zeta = \zeta_1$) für konstante, parabolische und elliptische Zirkulationsverteilung. Man sieht, daß in allen Fällen für $|\xi| > 1$ die Übereinstimmung unserer Näherung mit den exakten Lösungen recht gut ist. Aber auch für $|\xi| > 0{,}6$ liefert unsere Näherung noch recht brauchbare Werte. Schließlich zeigt Abb. 7 noch den Vergleich der exakten Rechnungen mit unserer Näherung für drei verschiedene Flügelformen, nämlich einen Rechteckflügel und zwei Trapezflügel der Zuspitzung 0,6 und 0,2 sämtlich vom Seitenverhältnis $\Lambda = 6$. In diesem Fall wurde die „exakte" Zirkulationsverteilung und Abwindverteilung nach dem Verfahren von *H Multhopp* gerechnet. Auch hier ist die Übereinstimmung befriedigend.

5. Zusammenfassung. Die Berechnung des Auf- bzw. Abwindwinkels in einiger Entfernung vor bzw. hinter dem Flügel läßt sich näherungsweise nach der Formel (6)

$$\alpha_w(\xi, \eta, \zeta) = \left(1 - \frac{\xi}{|\xi|}\right) \alpha_w(0, \eta, \zeta) - \frac{1}{4} \frac{\xi}{|\xi|^3} \frac{c_a}{\pi \Lambda}$$

durchführen, die für $|\xi| \geq 1$ gute Annäherung liefert. Hierin bedeutet $\alpha_w(0, \eta, \zeta)$ den Abwindwinkel in der Flügel-Querebene ($\xi = 0$). Innerhalb der Wirbelschicht ist er mit dem induzierten Anstellwinkel nach *Prandtl* gleichwertig und kann mit Hilfe der *Multhopp*schen Quadratur berechnet werden.

(Eingegangen am 20. September 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, (20b) Braunschweig, Andreeplatz 5.

Ausbreitungsgesetze schwacher Verdichtungsstöße in Gasen.

Von R. Sauer.

1. Einleitung. In einer früheren an dieser Stelle veröffentlichten Arbeit[1] wurden nichtstationäre Gasströmungen mit „schwachen" Versichtungsstößen untersucht. Dabei wurde die Entropieänderung beim Verdichtungsstoß vernachlässigt und die Stoßgeschwindigkeit durch den Mittelwert der Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Schalls vor und hinter dem Stoß ersetzt. In der vorliegenden Arbeit werden im Rahmen dieser Näherung asymptotische Gesetze für die Ausbreitung schwacher Verdichtungsstöße in einer ungestörten Atmosphäre hergeleitet, und zwar für ebene, zylindersymmetrische und kugelsymmetrische Stoßwellen. Solche Gesetze wurden schon mehrfach, z. B. von *Du Mond*, *Cohen*, *Panofsky* und *Deeds*[2] und von *Casson* und *Stanton*[3], angegeben. Neuerdings wurden sie durch Untersuchungen von *Friedrichs*[4] und *Anneli Lax*[5] verschärft. Die im folgenden entwickelte besonders einfache und unmittelbare Herleitung der asymptotischen Gesetze scheint jedoch bisher lediglich im Falle der ebenen Wellen[6] bemerkt worden zu sein.

2. Aufgabenstellung und Voraussetzungen. In einer ungestörten ruhenden Atmosphäre (Druck p_0, Dichte ϱ_0, Schallgeschwindigkeit a_0) breite sich ein ebener oder zylinder- oder kugelsymmetrischer Verdichtungsstoß mit nachfolgender Verdünnungswelle aus. Im Weg—Zeit-Diagramm (Abb. 1) wird der Strömungsbereich vorne am Stoß von der Bahn f der Stoßfront und hinten am Wellenfuß von der geraden Mach-Linie m mit der Neigung $dx/dt = a_0$ begrenzt. An der Stoßbahn f springen p_0, ϱ_0, a_0 unstetig auf $p_0 + \bar{p}$, $\varrho_0 + \bar{\varrho}$, $a_0 + \bar{a}$, an der Mach-Linie m schließen sich die Zustandswerte der ungestörten Atmosphäre und der Verdünnungswelle stetig aneinander. Die Druckverteilung $p_0 + p(x, t)$ in der Verdünnungswelle ist in Abb. 1 für drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte $t = 0$, $t = t_1$, $t = t_2$ angegeben.

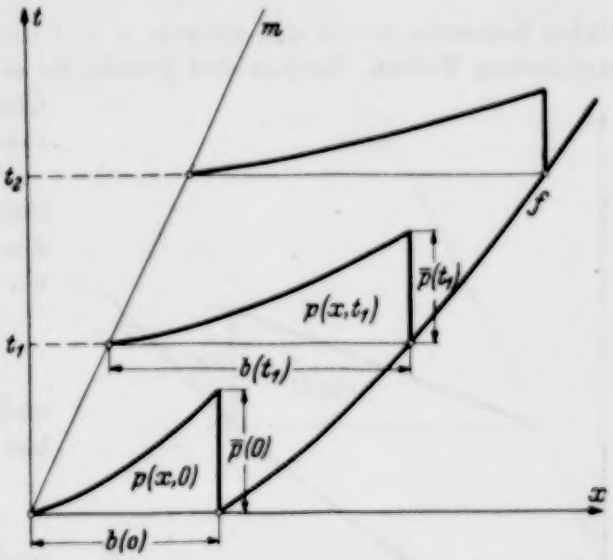


Abb. 1. Ausbreitung eines schwachen Verdichtungsstoßes mit nachfolgender Verdünnung.

Es wird nun die folgende Aufgabe gestellt: Der Drucksprung $\bar{p}(0)$ und die Druckverteilung in der Verdünnungswelle $p = p(x, 0)$ für den Zeitpunkt $t = 0$ ist vorgegeben. Gesucht ist die Stoßbahn f und die Druckverteilung $p(x, t)$ für beliebige Zeitpunkte $t > 0$ und zwar insbesondere der Drucksprung $\bar{p}(t)$ an der Stoßfront und die Breite $b(t)$ der Verdünnungswelle. Zur Lösung der Aufgabe setzen wir voraus:

a) Das Medium ist ein ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmen c_p, c_v ($\varkappa = c_p/c_v$).

b) Näherung der schwachen Verdichtungsstöße: Der mit der Zeit t abnehmende Entropiezuwachs an der Stoßfront wird durch einen konstanten Mittelwert ersetzt. Dann ist die Entropie in der Verdünnungswelle konstant und für die Ausbreitungsgeschwindigkeit D (= Neigung dx/dt der Stoßbahn f), den Drucksprung $\bar{p}(t)$ an der Stoßfront und die Nachlaufgeschwindigkeit $\bar{v}(t)$ unmittelbar hinter der Stoßfront gelten die Näherungsgleichungen[7]

$$D = \frac{1}{2}\left[a_0 + (a_0 + \bar{a} + \bar{v})\right], \tag{1}$$

---

[1] *R. Sauer*, Ing.-Arch. 14 (1943), S. 14.
[2] *Du Mond-Cohen-Panofsky-Deeds*, J. Acoust. Soc. America 18 (1946), S. 97.
[3] B. *Casson* — *J. Stanton*, Bull. American Phys. Soc. 22, Nr. 2 (1947).
[4] *K. O. Friedrichs*, Comm. on applied Mathematics 1 (1948), S. 211.
[5] *Annelie Lax*, Comm. on applied Mathematics 1 (1948), S. 247.
[6] *K. Oswatitsch*, Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 130; vgl. insbes. S. 131—132.
[7] *R. Sauer*, Méthodes mathématiques de la théorie des écoulements des fluides compressibles, § 28, Ziff. 17. Paris 1950 (im Druck).

$$\frac{\bar{p}}{p_0} = \frac{4\varkappa}{\varkappa+1}\frac{D-a_0}{a_0} = \varkappa\frac{\bar{v}}{a_0}\,; \tag{2}$$

dabei ist $\bar{v}+a_0+\bar{a}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls hinter der Stoßfront bezüglich der ruhenden Atmosphäre.

c) Linearisierung: Die isentropischen Zustandsänderungen in der Verdünnungswelle werden wie in der Akustik linearisiert:

$$\frac{p}{p_0} = \varkappa\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\frac{a}{a_0}\,, \tag{3}$$

und die Wellenformen $p = p(x,t)_{t=\text{konst}}$, $v = v(x,t)_{t=\text{konst}}$ für den Druck, die Nachlaufgeschwindigkeit usw. durch ihre Tangenten am Wellenfuß an der Mach-Linie m, also durch gerade Linien ersetzt (Abb. 2).

3. Herleitung asymptotischer Ausbreitungsgesetze. Nach Voraussetzung *c*) sind die Wellenformen $p = p(x,t)_{t=\text{konst}}$ usw. durch ihre Neigung an der Mach-Linie m festgelegt. Diese Neigung ergibt sich aber leicht aus den Differentialgleichungen der nichtsstationären Gasströmungen. *Hantzsche* und *Wendt*[1] haben sie in anderem Zusammenhang berechnet und erhielten für die Nachlaufgeschwindigkeit $v = v(x,t)_{\ =\text{konst}}$ (Abb. 2)

$$\frac{dx}{dv} = \begin{cases} \dfrac{\varkappa+1}{2}t + \text{konst} \longrightarrow \dfrac{\varkappa+1}{2}t \text{ für } \sigma = 0\,, \\ (\varkappa+1)\,t + \text{konst}\cdot\sqrt{t} \longrightarrow (\varkappa+1)\,t \text{ für } \sigma = 1\,, \\ \dfrac{\varkappa+1}{2}t\cdot\ln t + \text{konst}\cdot t \to \dfrac{\varkappa+1}{2}t\cdot\ln t \text{ für } \sigma = 2\,. \end{cases} \tag{4}$$

Dabei bedeutet $\sigma = 0$ die ebenen, $\sigma = 1$ die zylindersymmetrischen und $\sigma = 2$ die kugelsymmetrischen Wellen. Rechts sind jeweils die asymptotischen Ausdrücke für $t \to \infty$ angegeben. Die Gleichungen (4) zeigen, wie sich die Wellenform mit zunehmender Zeit abflacht.

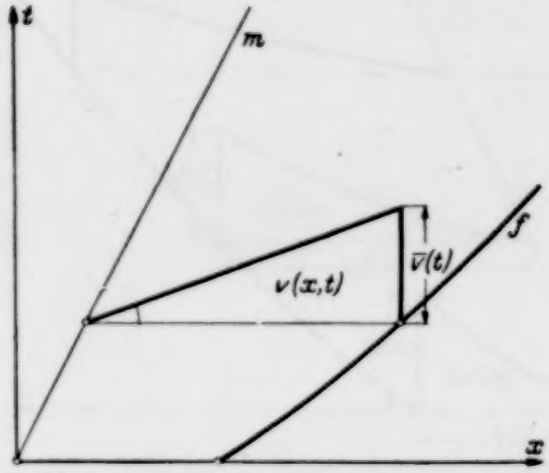


Abb. 2. Linearisierte Verdünnungswelle.

Nach Festlegung der Verdünnungswelle durch dx/dv bleibt lediglich noch die Aufgabe, die jeweilige Lage des Verdichtungsstoßes zu finden. Hierfür benützen wir die geometrische Beziehung (Abb. 2)

$$\bar{v}\,(t) = \frac{dv}{dx}\,b$$

und die Gleichungen (2) in Voraussetzung *b*). Dann hat man sogleich

$$\frac{\bar{p}}{p_0} = \varkappa\frac{dv}{dx}\frac{b}{a_0} \tag{5}$$

und

$$\frac{db}{dt} = D - a_0 = \frac{\varkappa+1}{4}\frac{dv}{dx}\,b\,. \tag{6}$$

Nach Einsetzen der asymptotischen Ausdrücke der Gleichungen (4) erhält man durch eine elementare Integration aus (6) die Breite $b(t)$ der Verdünnungswelle und hierauf aus (5) sofort den Drucksprung $\bar{p}(t)$ an der Stoßfront. Wir stellen das Ergebnis in folgender Tabelle zusammen:

	$\sigma = 0$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$
$\dfrac{\bar{p}\,(t)}{p_0}$	$\sim t^{-1/2}$	$\sim t^{-3/4}$	$\sim \dfrac{1}{t\,(\ln t)^{1/2}}$
$\dfrac{b\,(t)}{b(0)}$	$\sim t^{1/2}$	$\sim t^{1/4}$	$\sim (\ln t)^{1/2}$

Natürlich kann man in diesen asymptotischen Beziehungen die Zeit t durch den Weg $x = a_0 t$ ersetzen, den der Wellenfuß zurückgelegt hat.

4. Diskussion. Die in der Tabelle zusammengestellten asymptotischen Gesetze gelten für hinreichend große t, für welche die Drucksprünge so klein sind, daß die Näherung der schwachen

[1] *W. Hantzsche* und *H. Wendt*, Jahrb. Dtsch. Akad. Luftfahrforschung 1940, I, S. 536; vgl. hierzu FIAT-Bericht Angew. Math. Teil III, Abschn. IV, Gasdynamik, S. 122.

Stöße (Voraussetzung *b*) und die Linearisierung (Voruassetzung *c*) keine ins Gewicht fallenden Fehler verursachen. In solchen *t*-Bereichen werden die Gesetze durch Messungen gut bestätigt. Sie gelten auch für sägezahnartige Druckverläufe (Abb. 3) mit einer auf beiden Seiten durch einen Verdichtungsstoß abgeschlossenen Verdünnungswelle. Solche sägezahnartigen Druckverläufe lassen sich aus zwei an der Mach-Linie *m* aneinandergefügten Dreiecksdruckverläufen, wie wir sie in dieser Arbeit betrachtet haben, zusammensetzen.

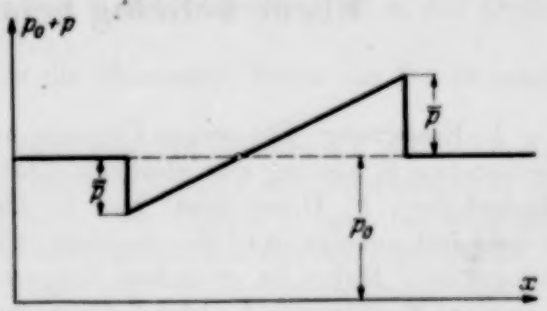


Abb. 3. Sägezahnartiger Druckverlauf.

Man beachte, daß die vorliegenden Untersuchungen trotz der als Voraussetzung *c*) eingeführten Linearisierungsvorschriften über den Rahmen der Akustik hinausgehen. In der akustischen Näherung erhielte man an Stelle der Stoßbahn *f* eine zu *m* parallele Mach-Linie, also eine zeitunabhängige Wellenbreite $b = \text{konst}$, und auch für das Abklingen des Drucksprungs $\bar{p}(t)$ andere Gesetze, z. B. im ebenen Fall ($\sigma = 0$) einen zeitunabhängigen Drucksprung $\bar{p} = \text{konst}$. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Absorption, die im akustischen Bereich für die Dämpfung der Schallwellen schließlich maßgebend ist, bei der vorliegenden Untersuchung naturgemäß vernachlässigt wurde.

(Eingegangen am 12. Oktober 1949.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *R. Sauer*, München 19. Romanstraße 34.

Berechnung eines statisch unbestimmt gestützten und senkrecht zu seiner Ebene beliebig belasteten geschlossenen Kreisringes.

Von W. Swida.

1. Einleitung. Die ersten Untersuchungen dieses Problems beziehen sich auf einen gleichmäßig belasteten Kreisring mit gleichen Abständen zwischen den Stützen. Dieser Fall wurde von *K. Federhofer*[1], *F. Düsterbehn*[2] und *S. Heßler*[3] und am eingehendsten von *G. Unold*[4] behandelt. *Unold* hat gezeigt, daß die Beanspruchung des Ringes von der Profilart des Querschnittes abhängig ist. Dabei ist zwischen Ringen „erster Profilart" (Rechteck, Rechteckrohr, Kreis) und „zweiter Profilart" (I- oder [-Querschnitt) zu unterscheiden. Die Untersuchung von *G. Unold* wurde durch *F. Stüssi*[5] erweitert.

Eine allgemeine Lösungsmethode für einen Kreisring der ersten Profilart ist für beliebig verteilte Belastung von *C. B. Biezeno* und *J. J. Koch*[6] auf dem Wege der Integration der Differentialgleichung der elastischen Linie angegeben worden. Dabei wurden als Unbekannte die vertikalen Stützkräfte gewählt und die Belastungsfunktion in Fourierreihen entwickelt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Berechnung eines statisch unbestimmt gestützten und senkrecht zu seiner Ebene beliebig belasteten Kreisringes der ersten Profilart angegeben, ein Verfahren, das sowohl einfach, als auch genügend allgemein ist. Dabei wird eine sozusagen statische Verwandtschaft zwischen einem Kreisträger auf mehreren Stützen und einem geraden Durchlaufträger ausgenützt. Obgleich die Untersuchung des Kreisträgers durch das Vorhandensein veränderlicher Torsionsmomente erschwert wird, läßt sie sich doch auf die Auflösung eines Systems dreigliedriger Gleichungen zurückführen, wie es auch bei einem Durchlaufträger der Fall ist. Die Auflösung des Gleichungssystems liefert die Biegemomente an den Stützen durch die alle anderen statischen Größen ausgedrückt werden können.

Abb. 1.

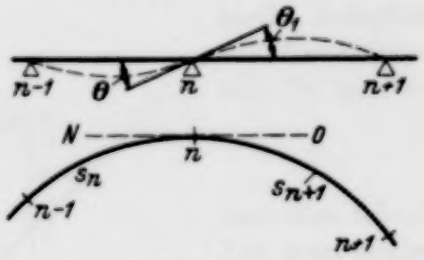


Abb. 2.

Es wird angenommen, daß alle Auflager von der in Abb. 1 dargestellten Art sind. Ein solches Auflager behindert die Drehung des Stützenquerschnittes in der normalen (radialen) Ebene, gibt ihm aber die volle Möglichkeit, sich in der Tangentialebene *NO* (Abb. 2) zu drehen. Auf diese Weise hat jeder Stützenquerschnitt nur eine Drehungsfreiheit und zwar in der Tangentialebene des Ringes. Der Fall eines „freien" Kreisringes, bei dem jeder Stützenquerschnitt immer zwei Drehungsfreiheiten hat, bei dem also nur der Schwerpunkt des Stützenquerschnittes unbeweglich ist (punktweise Stützung), ist als Gegenstand für eine gesonderte Untersuchung vorgesehen.

2. Theoretische Grundlagen. a) Allgemeines. Für eine beliebige Stütze ist

$$\Theta = -\Theta_1 . \tag{1}$$

Dabei sind Θ und Θ_1 die Neigungswinkel der Tangente an die Biegelinie in der vertikalen Tangentialebene *NO* (Abb. 2). Diese Gleichung kann man folgendermaßen darstellen:

$$\lambda_n + \eta_n + \mu_n = -(\lambda_n' + \eta_n' + \mu_n') ,$$

oder

$$\eta_n + \eta_n' + \mu_n + \mu_n' = -(\lambda_n + \lambda_n') . \tag{2}$$

Hier bedeuten λ_n, λ_n', η_n, η_n', μ_n und μ_n' die Drehwinkel an der Stütze n für die Bögen s_n und s_{n+1},

[1] *K. Federhofer*, Z. Math.u. Physik 62 (1914), S. 382.
[2] *F. Düsterbehn*, Eisenbau 6 (1920), S. 73.
[3] *S. Heßler*, Beton und Eisen 29 (1930), S. 149.
[4] *G. Unold*, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens H. 255. Berlin 1922.
[5] *F. Stüssi*, Schweiz. Bauztg. 111 (1938), S. 166.
[6] *C. B. Biezeno* und *J. J. Koch*, Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 321; siehe auch *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 338. Berlin 1939.

die als freiaufliegende Kreisträger auf zwei Stützen (Abb. 1) zu betrachten sind. Hierbei ist λ_n der Drehwinkel des Elementes s_n infolge der Außenbelastung des Feldes s_n; λ'_n ist der Drehwinkel des Bogens s_{n+1} infolge seiner Außenbelastung. Ferner bedeutet $\eta_{/n}$ bzw. η'_n den Drehwinkel für den Bogen s_n bzw. s_{n+1} infolge des Biegemomentes M_n an der Stütze n. μ_n ist der Drehwinkel des Elementes s_n infolge des Biegemomentes M_{n-1} an der Stütze $n-1$ und schließlich ist μ'_n der Drehwinkel des Elementes s_{n+1} infolge des Biegemomentes M_{n+1}.

Wir ermitteln zunächst die Werte $\eta_{/n}$, $\eta'_{/n}$, μ_n und μ'_n für die Momente, sowie die Drehwinkel λ_n und λ'_n für einige gebräuchliche Belastungsfälle.

b) Die Drehwinkel η und μ. Man betrachtet einen waagerechten Kreisbogen AB (Abb. 3), der auf zwei Stützen, nach der Art der Abb. 1, frei aufgelagert und durch das Biegemoment M an der Stütze B beansprucht wird. Das Moment M wirkt in der vertikalen Tangentialebene des rechten Stabendes. Unter der Wirkung von M entstehen an den Stützen die Auflagerkräfte A und B und die Torsionsmomente m_1 und m_2, die in den Ebenen der Stützenquerschnitte wirken. Die Pfeile der Momentvektoren sind in der üblichen Weise nach jener Seite gerichtet gezeichnet, von der aus gesehen die Momente im Uhrzeigersinne drehen.

Man ermittelt zunächst die Auflagerkräfte und die Torsionsmomente m_1 und m_2. Die Gleichgewichtsgleichungen des Ringabschnittes AB sind

$$\sum Z = A - B = 0,$$
$$\sum m_x = M \sin\alpha - (m_1 + m_2)\cos\alpha = 0,$$
$$\sum m_y = 2\,A\,r \sin\alpha + (m_1 - m_2)\sin\alpha - M\cos\alpha = 0.$$

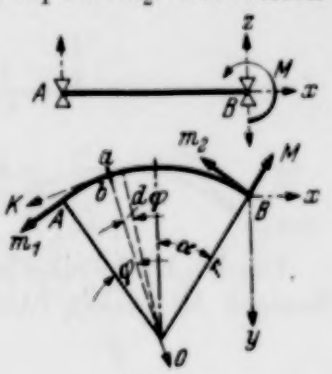


Abb. 3.

Die restlichen drei Gleichgewichtsgleichungen gehen in die Identität $0 = 0$ über. Daraus folgt

$$m_1 = \frac{M}{\sin 2\alpha} - A\,r,$$
$$m_2 = A\,r - M \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Zur Ermittlung von A wird der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit benützt. Das Torsionsmoment für einen beliebigen Querschnitt $(a\,b)$, der einem veränderlichen Zentriwinkel φ entspricht, ergibt sich als algebraische Summe der statischen Momente aller links von $(a\,b)$ angreifenden Kräfte in bezug auf die Tangente $(a\,K)$ zu

$$M_t = m_1 \cos\varphi - A\,r\,(1 - \cos\varphi) = \frac{M\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - A\,r.$$

Das Biegemoment im Querschnitt $(a\,b)$ als algebraische Summe der statischen Momente derselben Kräfte bezüglich des Radius $(a\,O)$ wird

$$M_b = A\,r\sin\varphi + m_1 \sin\varphi = \frac{M\sin\varphi}{\sin 2\alpha}.$$

Der positive Richtungssinn des Radius $(a\,O)$ und der Tangente $(a\,K)$ ist in Abb. 3 jeweils mit einem Pfeil bezeichnet.

Das Biegemoment kann auch aus der Bedingung:

$$M_b = -\frac{\partial M_t}{\partial \varphi}$$

bestimmt werden.

Die potentielle Energie des Kreisbogens AB wird

$$V = \oint_{(AB)} \frac{M_b^2\,ds}{2\,EJ} + \oint_{(AB)} \frac{M_t^2\,ds}{2\,C},$$

wobei C die Torsionssteifigkeit ist. Der Einfluß der Schubkräfte kann dabei vernachlässigt werden.

Auf Grund des Satzes von dem Minimum der Formänderungsarbeit ergibt sich für einen Ring mit konstantem Querschnitt:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{1}{EJ}\oint_{(AB)} M_b \frac{\partial M_b}{\partial A}\,ds + \frac{1}{C}\oint_{(AB)} M_t \frac{\partial M_t}{\partial A}\,ds = \frac{1}{EJ}\int_0^{2\alpha} M_b \frac{\partial M_b}{\partial A}\,r\,d\varphi + \frac{1}{C}\int_0^{2\alpha} M_t \frac{\partial M_t}{\partial A}\,r\,d\varphi =$$
$$= -\frac{1}{C}\int_0^{2\alpha}\left(\frac{M\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - A\,r\right) r^2\,d\varphi = -\frac{r^2}{C}\,(M - 2\,A\,r\alpha) = 0.$$

Es ist also

$$A = \frac{M}{2r\alpha},$$

$$m_1 = M\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right), \tag{3}$$

$$m_2 = M\left(\frac{1}{2\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha\right), \tag{4}$$

$$M_t = M\left(\frac{\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right).$$

Nun errechnet man den Drehwinkel η an der Stütze B. Auf Grund des Satzes von *Castigliano* wird

$$\left.\begin{aligned}\eta = \frac{\partial V}{\partial M} &= \frac{1}{EJ}\oint_{(AB)} M_b \frac{\partial M_b}{\partial M}\,ds + \frac{1}{C}\oint_{(AB)} M_t \frac{\partial M_t}{\partial M}\,ds = \frac{1}{EJ}\int_0^{2\alpha} \frac{Mr\sin^2\varphi}{\sin^2 2\alpha}\,d\varphi + \\ &+ \frac{1}{C}\int_0^{2\alpha} Mr\left(\frac{\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right)^2 d\varphi = \frac{Mr}{EJ\sin^2 2\alpha}\left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right) + \\ &+ \frac{Mr}{C}\left(\frac{\alpha}{\sin^2 2\alpha} + \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{Mr}{EJ} f_1(\alpha) + \frac{Mr}{C} f_2(\alpha).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Um den Drehwinkel μ am linken Ende A zu bestimmen, läßt man an diesem Ende ein fingiertes Moment M' wirken (Abb. 4). Dann wird

$$A = \frac{M - M'}{2r\alpha}.$$

Aus den Gleichgewichtsgleichungen

$$(M + M')\sin\alpha - (m_1 + m_2)\cos\alpha = 0,$$

$$\frac{M - M'}{2r\alpha}\,2r\sin\alpha + (M' - M)\cos\alpha + (m_1 - m_2)\sin\alpha = 0$$

ergibt sich

$$m_1 = \frac{M}{\sin 2\alpha} - M'\operatorname{ctg} 2\alpha - \frac{M - M'}{2\alpha}.$$

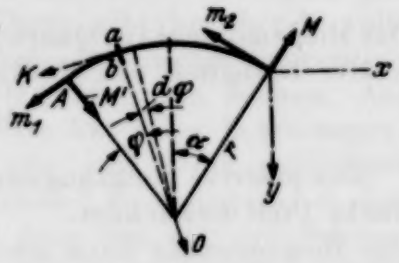


Abb. 4.

Man erhält schließlich

$$M_t = m_1\cos\varphi - M'\sin\varphi - Ar(1 - \cos\varphi) =$$
$$= M\left(\frac{\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right) + M'\left(\frac{1}{2\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\right),$$

$$M_b = Ar\sin\varphi + m_1\sin\varphi + M'\cos\varphi = \frac{M\sin\varphi}{\sin 2\alpha} + M'(\cos\varphi - \operatorname{ctg} 2\alpha\sin\varphi),$$

$$\left.\begin{aligned}\mu = \left(\frac{\partial V}{\partial M'}\right)_{M'=0} &= \left(\frac{1}{EJ}\int_0^{2\alpha} M_b\frac{\partial M_b}{\partial M'}\,r\,d\varphi + \frac{1}{C}\int_0^{2\alpha} M_t\frac{\partial M_t}{\partial M'}\,r\,d\varphi\right)_{M'=0} \\ &= \frac{1}{EJ}\int_0^{2\alpha}\frac{Mr\sin\varphi}{\sin 2\alpha}(\cos\varphi - \operatorname{ctg} 2\alpha\sin\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{C}\int_0^{2\alpha} Mr\left(\frac{\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2\alpha}\right)\left(\frac{1}{2\alpha} - \cos\varphi\operatorname{ctg} 2\alpha - \sin\varphi\right)d\varphi = \frac{Mr}{EJ}\frac{1}{2\sin 2\alpha}(1 - 2\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha) \\ &+ \frac{Mr}{C}\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\sin 2\alpha} - \frac{\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = \frac{Mr}{EJ} f_3(\alpha) + \frac{Mr}{C} f_4(\alpha).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

c) Die Drehwinkel λ für gleichmäßig verteilte Belastung. Die Auflagerwiderstände sind $A = B = qr\alpha$ (Abb. 5). Man bringt an den Schnittstellen A und B die fingierten

Momente M' an. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\sum m_x = 2\,M' \sin\alpha - 2\,m\cos\alpha + 2\int_0^{\alpha} q r\,(r\cos\psi - r\cos\alpha)\,d\psi = 0$$

folgt

$$m = qr^2\,(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) + M'\operatorname{tg}\alpha\,. \tag{7}$$

Für einen beliebigen Querschnitt (Abb. 6) ist

$$M_t = m\cos\varphi - qr^2\,\alpha\,(1-\cos\varphi) + \int_0^{\varphi} q r\,d\xi\,(r - r\cos\xi) -$$

$$- M'\sin\varphi = qr^2\,(\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi - \alpha + \varphi - \sin\varphi) + M'\,(\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi - \sin\varphi),$$

$$M_b = qr^2\,\alpha\sin\varphi + m\sin\varphi - \int_0^{\varphi} qr^2\sin\xi\,d\xi + M'\cos\varphi$$

$$= qr^2\,(\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi - 1 + \cos\varphi) + M'\,(\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\varphi + \cos\varphi)\,.$$

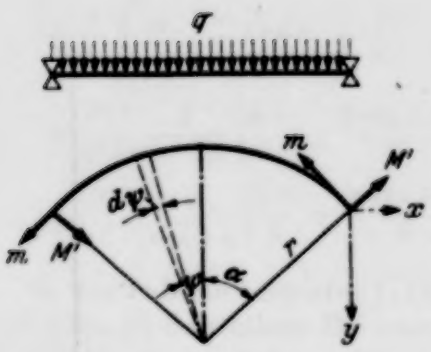


Abb. 5.

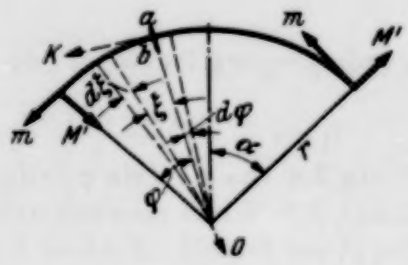


Abb. 6.

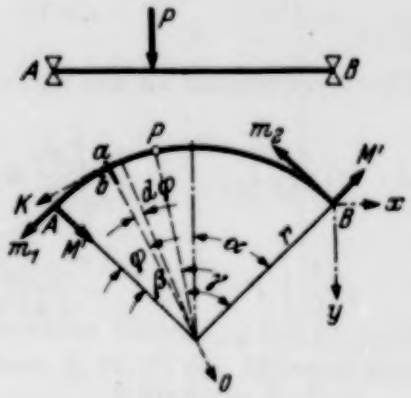


Abb. 7.

Der Drehwinkel am linken bzw. am rechten Ende wird

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial M'}\right)_{M'=0} = \frac{1}{2\,EJ}\int_0^{2\alpha} qr^2\,(\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi - 1 + \cos\varphi)\,(\cos\varphi + \operatorname{tg}\alpha\sin\varphi)\,r\,d\varphi + \\
&+ \frac{1}{2\,C}\int_0^{2\alpha} qr^2\,(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\varphi - \alpha + \varphi - \sin\varphi)\,(\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi - \sin\varphi)\,r\,d\varphi \\
&= \frac{qr^3}{2\,EJ}\left(\frac{\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) + \frac{qr^3}{2\,C}\,(\alpha\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha + 3\,\alpha) = \frac{qr^3}{EJ}\,f_5(\alpha) + \frac{qr^3}{C}\,f_6(\alpha)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Zahlenwerte der Funktionen $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots f_6(\alpha)$ in den Formeln (5), (6) und (8) sind weiter unten in einer Tabelle aufgeführt, und zwar für den Winkel α gleich 45°, 30°, 22° 30′ und 18°.

d) Die Drehwinkel λ für eine unsymmetrische Einzellast. Die Lage der Einzellast wird durch den Winkel β angegeben, wobei $\beta < \alpha$ ist (Abb. 7). Man läßt am linken Ende des Kreisbogens AB ein fingiertes Moment M' wirken. Dann wird

$$A = \frac{P\gamma}{2\alpha} - \frac{M'}{2r\alpha}\,.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum m_x = Pr\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos\alpha] - m_1\cos\alpha - m_2\cos\alpha + M'\sin\alpha = 0\,,$$

$$\sum m_y = 2\,A\cdot r\sin\alpha - Pr\,[\sin(\alpha-\beta) + \sin\alpha] + m_1\sin\alpha - m_2\sin\alpha + M'\cos\alpha = 0$$

erhält man

$$m_2 = Pr\left[\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha} - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}\right] + M'\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right), \tag{9}$$

$$m_1 = Pr\left(\frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\alpha}\right) + M'\left(\frac{1}{2\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha\right), \tag{10}$$

wobei

$$k = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} + \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$$

ist. Für einen beliebigen Querschnitt des Abschnittes AP wird

$$M_i^I = m_1\cos\varphi - Ar(1-\cos\varphi) - M'\sin\varphi = Pr\left(\frac{k\cos\varphi}{2} - \frac{\gamma'}{2\alpha}\right) + M'\left(\frac{1}{2\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\right),$$

$$M_b^I = Ar\sin\varphi + m_1\sin\varphi + M'\cos\varphi = \frac{Pr}{2}k\sin\varphi + M'(\cos\varphi - \operatorname{ctg} 2\alpha\ \sin\varphi).$$

Für einen beliebigen Querschnitt des Abschnittes PB wird

$$M_i^{II} = m_1\cos\varphi - Ar(1-\cos\varphi) + Pr[1-\cos(\varphi-\beta)] - M'\sin\varphi$$
$$= Pr\left[\frac{k}{2}\cos\varphi + \frac{\beta}{2\alpha} - \cos(\varphi-\beta)\right] + M'\left(\frac{1}{2\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\right),$$

$$M_b^{II} = Ar\sin\varphi + m_1\sin\varphi - Pr\sin(\varphi-\beta) + M'\cos\varphi =$$
$$= Pr\left[\frac{k\cdot\sin\varphi}{2} - \sin(\varphi-\beta)\right] + M'(\cos\varphi - \operatorname{ctg} 2\alpha\ \sin\varphi).$$

Der Drehwinkel an der linken Stütze ergibt sich zu

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_A = \left(\frac{\partial V}{\partial M'}\right)_{M'=0} &= \frac{1}{EJ}\int_0^\beta \frac{Pr}{2}k\sin\varphi(\cos\varphi - \operatorname{ctg} 2\alpha\sin\varphi)\,r\,d\varphi + \\
&+ \frac{1}{C}\int_0^\beta Pr\left(\frac{k\cos\varphi}{2} - \frac{\gamma'}{2\alpha}\right)\left(\frac{1}{2\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha\ \cos\varphi - \sin\varphi\right) r\,d\varphi + \\
&+ \frac{1}{EJ}\int_\beta^{2\alpha} Pr\left[\frac{k\sin\varphi}{2} - \sin(\varphi-\beta)\right](\cos\varphi - \operatorname{ctg} 2\alpha\sin\varphi)\,r\,d\varphi + \\
&+ \frac{1}{C}\int_\beta^{2\alpha} Pr\left[\frac{k}{2}\cos\varphi + \frac{\beta}{2\alpha} - \cos(\varphi-\beta)\right]\left(\frac{1}{2\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\right) r\,d\varphi = \\
&= \frac{Pr^2}{EJ}\left\{\operatorname{ctg} 2\alpha\left[\frac{\sin\beta}{4} - \frac{\sin(4\alpha-\beta)}{4} - \frac{k\alpha}{2} + \frac{k\sin 4\alpha}{8} + \left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\beta\right] + \sin\beta\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\right\} + \\
&+ \frac{Pr^2}{C}\left\{\operatorname{ctg} 2\alpha\left[\frac{3}{4}\sin\beta + \frac{\sin(4\alpha-\beta)}{4} - \frac{k\alpha}{2} - \frac{k\sin 4\alpha}{8} + \left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\beta\right] + \right. \\
&+ \frac{k}{4}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - \sin^2 2\alpha\right) + 1 - \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{3}{4}\cos\beta - \frac{\sin(2\alpha-\beta)}{2\alpha} - \frac{\cos(4\alpha-\beta)}{4} \\
&\left. + \left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\beta\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Die Beiwerte von $\frac{Pr^2}{EJ}$ und $\frac{Pr^2}{C}$ in der letzteren Gleichung sind von den Zentriwinkeln α und β abhängig. Für zwei Laststellungen und zwar für $\beta = \alpha/2$ und $\beta = 2\alpha/3$ sind diese Beiwerte in der Tabelle 1 angegeben. Dabei bedeutet $f_1(\alpha,\beta)$ den Beiwert von $\frac{Pr^2}{EJ}$ für $\beta = \frac{\alpha}{2}$ und $f_5(\alpha,\beta)$ denselben Beiwert für $\beta = \frac{2\alpha}{3}$. Ferner ist $f_2(\alpha,\beta)$ bzw. $f_6(\alpha,\beta)$ der Beiwert von $\frac{Pr^2}{C}$ für $\beta = \frac{\alpha}{2}$ bzw. $\beta = \frac{2\alpha}{3}$.

Zur Bestimmung des Drehwinkels λ_B am rechten Ende wird daran ein fingiertes Moment M' angebracht (Abb. 7). Dann erhält man

$$A = \frac{P\gamma}{2\alpha} + \frac{M'}{2r\alpha},$$

$$m_1 = Pr\left(\frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\alpha}\right) + M'\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right),$$

$$M_t^I = Pr\left(\frac{k\cos\varphi}{2} - \frac{\gamma}{2\alpha}\right) + M'\left(\frac{\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right),$$

$$M_b^I = \frac{Pr}{2}\, k \sin\varphi + \frac{M'\sin\varphi}{\sin 2\alpha},$$

$$M_t^{II} = Pr\left[\frac{k}{2}\cos\varphi + \frac{\beta}{2\alpha} - \cos(\varphi-\beta)\right] + M'\left(\frac{\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right),$$

$$M_b^{II} = Pr\left[\frac{k}{2}\sin\varphi - (\varphi-\beta)\right] + \frac{M'\sin\varphi}{\sin 2\alpha},$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_B = {} & \frac{1}{EJ}\int_0^\beta \frac{Pr}{2}\, k\, \frac{\sin^2\varphi}{\sin 2\alpha}\, r\,d\varphi + \frac{1}{C}\int_0^\beta Pr\left(\frac{k\cos\varphi}{2} - \frac{\gamma}{2\alpha}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right) r\,d\varphi + \\
& + \frac{1}{EJ}\int_\beta^{2\alpha} Pr\left[\frac{k}{2}\sin\varphi - \sin(\varphi-\beta)\right]\frac{\sin\varphi}{\sin 2\alpha}\, r\,d\varphi + \\
& + \frac{1}{C}\int_\beta^{2\alpha} Pr\left[\frac{k}{2}\cos\varphi + \frac{\beta}{2\alpha} - \cos(\varphi-\beta)\right]\left(\frac{\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right) r\,d\varphi \\
= {} & \frac{Pr^2}{EJ}\,\frac{1}{\sin 2\alpha}\left[\frac{k\alpha}{2} - \frac{k\sin 4\alpha}{8} + \frac{\sin(4\alpha-\beta)}{4} - \frac{\sin\beta}{4} - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cos\beta\right] + \\
& + \frac{Pr^2}{C}\left\{\frac{1}{\sin 2\alpha}\left[\frac{k\alpha}{2} + \frac{k\sin 4\alpha}{8} - \frac{\sin(4\alpha-\beta)}{4} - \frac{3}{4}\sin\beta - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cos\beta\right] + \frac{\beta}{2\alpha}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

In der Tabelle bedeutet $f_3(\alpha,\beta)$ den Beiwert von Pr^2/EJ in der letzteren Gleichung für $\beta = \alpha/2$ und $f_7(\alpha,\beta)$ denselben Beiwert für $\beta = 2\alpha/3$. Ferner ist $f_4(\alpha,\beta)$ bzw. $f_8(\alpha,\beta)$ der Beiwert von Pr^2/C für $\beta = \alpha/2$ bzw. für $\beta = 2\alpha/3$.

Wenn die Einzellast P in der Feldmitte wirkt, dann ist $\beta = \alpha$, und man erhält nach einer Reihe von Umformungen

$$\lambda_A = \lambda_B = \frac{Pr^2}{EJ}\,\frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\cos\alpha} + \frac{Pr^2}{C}\left(\frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\cos\alpha} - \frac{1}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2}\right) = \frac{Pr^2}{EJ} f_7(\alpha) + \frac{Pr^2}{C} f_8(\alpha). \quad (13)$$

Dabei wird das Torsionsmoment an der Stütze

$$m = \frac{Pr}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right). \quad (14)$$

Die Funktionen $f_7(\alpha)$ und $f_8(\alpha)$ sind ebenfalls in der Tabelle angegeben.

Es ist zu bemerken, daß sämtliche Beiwerte $f(\alpha)$ und $f(\alpha,\beta)$ für $2\alpha = 180°$ entweder unendlich groß sind, oder in eine unbestimmte Form übergehen. Dasselbe gilt für die Torsionsmomente an den Stützen.

In der Tabelle wird der Einfluß der Biegemomente durch die Beiwerte $f_1(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $\ldots f_1(\alpha,\beta)$, $f_3(\alpha,\beta)$ usw. mit ungeraden Zeiger und der Einfluß der Torsionsmomente durch die Beiwerte $f_2(\alpha)$, $f_4(\alpha)$, $\ldots f_2(\alpha,\beta)$, $f_4(\alpha,\beta)$ usw. mit geraden Zeiger berücksichtigt.

Tabelle 1. *Funktionen $f(\alpha)$ und $f(\alpha,\beta)$.*

	Funktionen $f(\alpha)$ bzw. $f(\alpha,\beta)$ für			
	$\alpha = \pi/4$	$\pi/6$	$\pi/8$	$\pi/10$
$f_1(\alpha)$	0,7854	0,4095	0,2854	0,2211
$f_2(\alpha)$	0,1488	0,0320	0,0122	0,0060
$f_3(\alpha)$	0,5000	0,2283	0,1517	0,1150
$f_4(\alpha)$	0,1366	0,0285	0,0107	0,0054
$f_5(\alpha)$	0,2854	0,0604	0,0229	0,0112
$f_6(\alpha)$	0,0708	0,0067	0,0014	0,0005
$f_7(\alpha)$	0,2777	0,0872	0,0440	0,0268
$f_8(\alpha)$	0,0706	0,0099	0,0028	0,0011
$f_1(\alpha,\beta)$	0,2255	0,0750	0,0385	0,0230
$f_2(\alpha,\beta)$	0,0530	0,0077	0,0018	0,0008
$f_3(\alpha,\beta)$	0,1791	0,0542	0,0269	0,0160
$f_4(\alpha,\beta)$	0,0482	0,0065	0,0016	0,0007
$f_5(\alpha,\beta)$	0,2618	0,0847	0,0430	0,0265
$f_6(\alpha,\beta)$	0,0630	0,0090	0,0023	0,0010
$f_7(\alpha,\beta)$	0,2260	0,0692	0,0340	0,0200
$f_8(\alpha,\beta)$	0,0583	0,0073	0,0019	0,0008

e) Dreigliedrige Elastizitätsgleichungen. Nun kann man auf Grund von (5) und (6) folgende allgemeine Ausdrücke für Drehwinkel η_n, η_n', μ_n und μ_n' in (2) anschreiben:

$$\eta_n = \frac{M_n r}{EJ} f_1(\alpha_n) + \frac{M_n r}{C} f_2(\alpha_n),$$

$$\eta_n' = \frac{M_n r}{EJ} f_1(\alpha_{n+1}) + \frac{M_n r}{C} f_2(\alpha_{n+1}),$$

$$\mu_n = \frac{M_{n-1}\,r}{EJ} f_3(\alpha_n) + \frac{M_{n-1}\,r}{C} f_4(\alpha_n),$$
$$\mu_n' = \frac{M_{n+1}\,r}{EJ} f_3(\alpha_{n+1}) + \frac{M_{n+1}\,r}{C} f_4(\alpha_{n+1}).$$

Setzt man die erhaltenen Werte von η_n, η_n', μ_n und μ_n' in (2) ein und multipliziert die beiden Seiten dieser Gleichung mit EJ/r, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} M_{n-1}[f_3(\alpha_n) + t f_4(\alpha_n)] + M_n[f_1(\alpha_n) + f_1(\alpha_{n+1}) + t f_2(\alpha_n) + \\ + t f_2(\alpha_{n+1})] + M_{n+1}[f_3(\alpha_{n+1}) + t f_4(\alpha_{n+1})] \\ = -(\lambda_n + \lambda_n')\frac{EJ}{r}, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

wobei $t = EJ/C$ ist. Das ist die Grundgleichung zur Ermittlung der statisch unbestimmten Stützenbiegemomente in einem geschlossenen oder offenen Kreisringträger. Diese dreigliedrige Gleichung ist ähnlich gebaut wie die *Clapeyron*sche Dreimomentengleichung. Die Beiwerte von M_{n-1}, M_n und M_{n+1} können als Vorzahlen und die rechte Seite der Gleichung als Belastungsglied bezeichnet werden.

Wenn die Zentriwinkel gleich sind, wenn also $\alpha_n = \alpha_{n+1} = \alpha$ ist, dann vereinfacht sich die Grundgleichung wesentlich:

$$(M_{n-1} + M_{n+1})[f_3(\alpha) + t f_4(\alpha)] + 2\,M_n[f_1(\alpha) + t f_2(\alpha)] = -(\lambda_n + \lambda_n')\frac{EJ}{r}. \quad (16)$$

Für jede Stütze eines geschlossenen Kreisringes muß eine Gleichung nach der Art (15) oder (16) aufgestellt werden. Die Zahl der Gleichungen muß also gleich der Anzahl der Stützen sein. Für symmetrische Belastung kann natürlich eine wesentliche Vereinfachung erzielt werden.

Für einen offenen Kreisträger auf n Stützen (Abb. 10) genügen $n-2$ Gleichungen für die Zwischenstützen.

3. Zahlenbeispiel. Ein geschlossener Kreisring auf fünf Stützen mit $r = 3$ m hat die in Abb. 8 dargestellte Belastung aufzunehmen. Die Stützenabstände sind verschieden. Der Einfachheit halber wird angenommen, daß $t = EJ/C = 1$ ist.

Wir fangen mit der Stütze 2 an. Die Gleichung (16) für diese Stütze lautet

$$(M_1 + M_3)[f_3(\alpha) + t f_4(\alpha)] + 2\,M_2[f_1(\alpha) + t f_2(\alpha)] = -\frac{EJ}{r}\left[\frac{Pr^2}{EJ} f_7(\alpha) + \frac{Pr^2}{C} f_8(\alpha) + \frac{qr^3}{EJ} f_5(\alpha) + \frac{qr^3}{C} f_6(\alpha)\right].$$

Nach Einführung der Zahlenwerte erhält man

$$(M_1 + M_3)\,(0{,}2283 + 0{,}0285) + 2\,M_2\,(0{,}4095 + 0{,}0320) = -[5\cdot 3\,(0{,}872 + 0{,}0099) + 2\cdot 3^2\,(0{,}0604 + 0{,}0067)].$$

Für die Stütze 3 ergibt sich nach (15)

$$M_2\,(0{,}2283 + 0{,}0285) + M_3\,(0{,}4095 + 0{,}0320 + 0{,}7854 + 0{,}1488) + M_4\,(0{,}5000 + 0{,}1366) = -[2\cdot 3^2\,(0{,}0604 + 0{,}0067) + 3{,}5\cdot 3\,(0{,}2255 + 0{,}0530 + 0{,}1791 + 0{,}0482)].$$

Es ist leicht, die restlichen drei Gleichungen aufzustellen:

$$(M_3 + M_5)\,(0{,}5000 + 0{,}1366) + 2\,M_4\,(0{,}7854 + 0{,}1488) = -[3{,}5\cdot 3\,(0{,}2255 + 0{,}0530 + 0{,}1791 + 0{,}0482) + 4{,}5\cdot 3\,(0{,}2260 + 0{,}0583)] \text{ (Stütze 4)},$$

$$M_4\,(0{,}5000 + 0{,}1366) + M_5\,(0{,}7854 + 0{,}4095 + 0{,}1488 + 0{,}0320) + M_1\,(0{,}2283 + 0{,}0285) = -\,4{,}5\cdot 3\,(0{,}2618 + 0{,}0630) \text{ (Stütze 5)}.$$

$$(M_5 + M_2)\,(0{,}2283 + 0{,}0285) + 2\,M_1\,(0{,}4095 + 0{,}0320) = -\,5\cdot 3\,(0{,}0872 + 0{,}0099) \text{ (Stütze 1)}.$$

Die Auflösung der Gleichungen liefert

$$M_1 = -\,0{,}62\text{ tm}, \quad M_2 = -\,2{,}06\text{ tm}, \quad M_3 = -\,2{,}76\text{ tm}, \quad M_4 = -\,3{,}46\text{ tm}, \quad M_5 = -\,1{,}47\text{ tm}.$$

Das negative Vorzeichen zeigt, daß der Richtungssinn der Momentvektoren entgegengesetzt dem in Abb. 3 bis 7 dargestellten Richtungssinn ist.

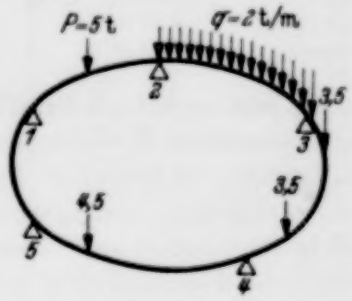
Es ist zu beachten, daß sich folgende Werte für die Biegemomente ergeben würden:

$$M_1 = -\,0{,}61\text{ tm}, \quad M_2 = -\,2{,}01\text{ tm}, \quad M_3 = -\,2{,}69\text{ tm}, \quad M_4 = -\,3{,}34\text{ tm}, \quad M_5 = -\,1{,}44\text{ tm},$$

wenn man bei der Aufstellung der Gleichungen sämtliche Beiwerte $f_2(\alpha)$, $f_4(\alpha)$ usw., die von der Torsionsenergie abhängig sind, vernachlässigen würde.

Man ersieht aus dem Beispiel, daß der Unterschied für den ersten und zweiten Fall nirgends größer als 4% ist. Eine Vernachlässigung der geraden Beiwerte kann jedoch im allgemeinen nicht empfohlen werden, weil deren Einfluß auf die Torsionsmomente viel größer als auf die Biegemomente ist.

Nachdem die Biegemomente an den Stützen ermittelt sind, ist es leicht, mit Hilfe der für jeden Belastungsfall entwickelten Formeln die Stützentorsionsmomente sowie die Biege- und Torsionsmomente in einem beliebigen Querschnitt zu bestimmen, weil jedes Feld als ein selbständiger Träger auf zwei Stützen (Abb. 1) betrachtet werden darf, der durch die angegebene äußere Belastung und die gefundenen Biegemomente an den Stützen belastet wird.



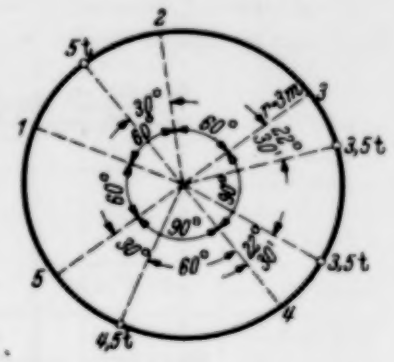


Abb. 8.

So ergibt sich z. B. das Torsionsmoment, das die Stütze 2 aufzunehmen hat, auf Grund von (14), (7), (3) und (4) zu

$$\frac{Pr}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)+qr^2(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)-M_2\left(\frac{1}{\alpha}-2\operatorname{ctg}2\alpha\right)$$
$$-M_1\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}-\frac{1}{2\alpha}\right)-M_3\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}-\frac{1}{2\alpha}\right)=-0{,}14\text{ tm}.$$

Wenn man die geraden Funktionen vernachlässigt, dann erhält man $-0{,}09$ tm. Das Biegemoment in einem beliebigen Querschnitt des Feldes 2—3 wird

$$M_b=qr^2(\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi-1+\cos\varphi)+\frac{M_3\sin\varphi}{\sin 2\alpha}$$
$$+M_2(\cos\varphi-\operatorname{ctg}2\alpha\sin\varphi)=2{,}0\cdot 3{,}0^2(0{,}577\sin\varphi-1+\cos\varphi)$$
$$-3{,}180\sin\varphi-2{,}06(\cos\varphi-0{,}577\sin\varphi)=8{,}40\sin\varphi-18{,}00$$
$$+15{,}94\cos\varphi\text{, usw.}$$

4. Der festeingespannte Kreisträger als Sonderfall. Die erhaltenen Formeln für die Drehwinkel und die Zahlenwerte der Tabelle können auch zur Berechnung von Kreisträgern mit festeingespannten Enden verwendet werden. Es genügt in diesem Falle, den Ausdruck für den Drehwinkel an der Einspannungsstelle anzuschreiben und ihn gleich Null zu setzen.

Abb. 9.

Abb. 10.

Als Beispiel betrachten wir einen festeingespannten Kreisträger mit $2\alpha=90°$, der durch die Einzellast P in der Mitte beansprucht wird (Abb. 9).

Man schreibt den Ausdruck für den Drehwinkel in der Tangentialebene an der Einspannungsstelle und setzt ihn gleich Null:

$$0{,}2777\frac{Pr^2}{EJ}+0{,}0706\frac{Pr^2}{C}-0{,}7854\frac{Mr}{EJ}-0{,}1488\frac{Mr}{C}-0{,}5000\frac{Mr}{EJ}-0{,}1366\frac{Mr}{C}=0,$$

wobei M das Biegemoment an der Stütze ist. Daraus folgt

$$M=Pr\frac{0{,}2777+0{,}0706\,t}{1{,}2854+0{,}2854\,t},$$

worin $t=\frac{EJ}{C}$ ist. Bei $t=1$ ist $M=0{,}2217\,Pr$.

Das Torsionsmoment an der Stütze ergibt sich auf Grund von (14) (3) und (4) zu

$$m=\frac{Pr}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)-M\operatorname{tg}\alpha=-Pr\frac{0{,}0115+0{,}0115\,t}{1{,}2854+0{,}2854\,t}.$$

Bei $t=1$ ist $m=-0{,}0146\,Pr$. Der wirkliche Richtungssinn der Momentvektoren ist in Abb. 9 dargestellt.

Es ist zu bemerken, daß das hier entwickelte Verfahren auch zur Berechnung von Durchlaufträgern verwendet werden kann, welche im Grundriß die in Abb. 10 gezeigte Form haben.

(Eingegangen am 24. Oktober 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. Ing. *W. Swida*, Karlsruhe, Stuttgarter Str. 21.

Tafeln der verallgemeinerten Kreisfunktionen
Sin (4) v, Cos (4) v, Sin (6) v, Cos (6) v, Sin (8) v, Cos (8) v.

Von **R. Grammel.**

Ich bin mehrfach brieflich nach Tafeln der von mir vor kurzem ausführlich entwickelten verallgemeinerten Kreisfunktionen[1] Sin (n) v und Cos (n) v gefragt worden, welche da und dort für die Lösung technischer Aufgaben verwendet werden, und lege daher hier solche Tafeln für die wohl zunächst wichtigsten Fälle $n = 4$, 6 und 8 vor. Die ziemlich mühsame Berechnung dieser Tafeln ist nach einem von uns gemeinsam entwickelten Plan von meinem Mitarbeiter *F. Jindra* sorgfältig durchgeführt worden, und zwar mit sieben bis acht Stellen hinter dem Komma, wovon nur die letzte und in wenigen Fällen die vorletzte unsicher war, so daß wir die Richtigkeit der hier mitgeteilten sechs Stellen gewährleisten können.

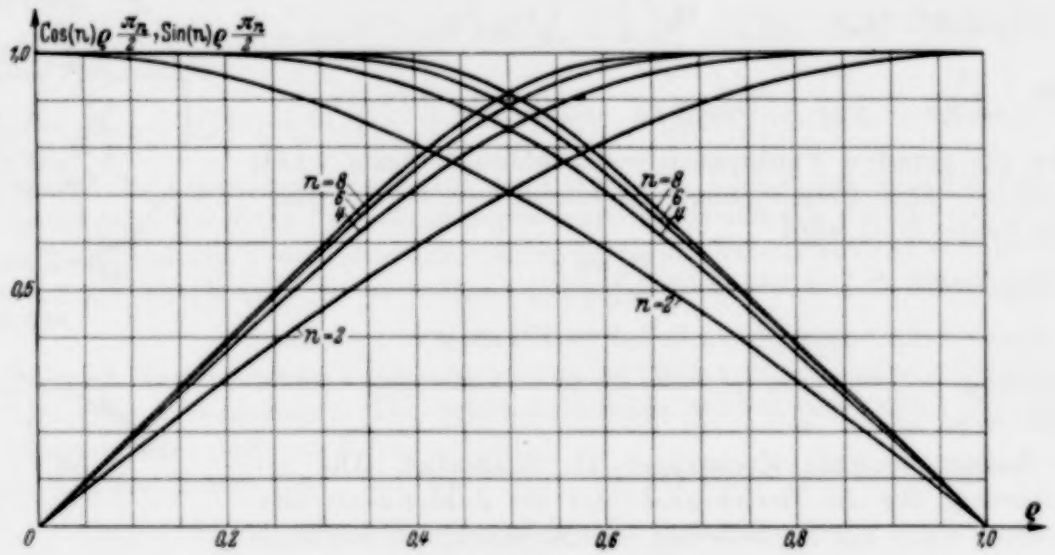


Abb. 1.

Die Werte der Tafeln 1 bis 3 für Sin (4) v, Cos (4) v, Sin (6) v, Cos (6) v, Sin (8) v und Cos (8) v sind fast alle mit Hilfe der von mir seinerzeit angegebenen Reihen[2] dieser Funktionen für das Argument $v = 0{,}00$ bis $v = 1{,}00$ gerechnet; nur für die Bereiche schlechterer Konvergenz [$v = 0{,}95$ bis $v = 1{,}00$ bei Sin (6) v und Cos (6) v; sowie $v = 0{,}90$ bis $v = 1{,}00$ bei Sin (8) v und Cos (8) v] sind die Werte durch numerische Berechnung der Integrale für ArSin x und ArCos x und Funktionsumkehr ermittelt worden. An sich hätte es genügt, die Tafeln 1, 2 und 3 je bis zum Argument $v = \frac{1}{4}\pi_4\,(= 0{,}927\ldots)$, $v = \frac{1}{4}\pi_6\,(= 0{,}964\ldots)$ und $v = \frac{1}{4}\pi_8\,(= 0{,}978\ldots)$ fortzusetzen, da mit den Tafelwerten von Cos (n) v und Sin (n) v für den Bereich $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}\pi_n$ die beiden Funktionen für gerades n vollständig bestimmt sind. Wir haben die Tafeln aber darüber hinaus (genauer gesagt über $v = 1$ hinaus) in allerdings größeren Schritten bis zum Argument $v = 4{,}0$ fortgesetzt, so daß sie mindestens eine halbe Periode überdecken. Selbstverständlich sind diese weiteren Tafelwerte vermittels Spiegelung des Arguments an den Werten $v = \frac{1}{4}\pi_n$ und $\frac{1}{2}\pi_n$ und durch Interpolation gefunden worden.

Weil es für manche Zwecke bequemer sein mag, das Argument in der Form

$$v = \varrho\,\frac{\pi_n}{2}$$

---

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 188.

[2] Der Reihenkoeffizient $b_4^{(n)}$ (27) auf S. 193 ist zu berichtigen in:

$$b_4^{(n)} = \frac{n-1}{4n+1}\left\{(n-2)\left[\frac{1}{24}(n-3)(n-4)\,a_1^{(n)4} + \frac{1}{2}(n-3)a_1^{(n)2}a_2^{(n)} + a_1^{(n)}a_3^{(n)} + \frac{1}{2}a_2^{(n)2}\right] + a_4^{(n)}\right\}.$$

Tafel 1.

v	Sin (4) v	Cos (4) v	v	Sin (4) v	Cos (4) v	v	Sin (4) v	Cos (4) v
0,00	0,000 000	1,000 000	0,50	0,495 388	0,984 591	1,0	0,880 880	0,794 227
01	010 000	1,000 000	51	504 915	983 340	1	924 567	720 360
02	020 000	1,000 000	52	514 405	982 016	2	956 038	636 942
03	030 000	1,000 000	53	523 855	980 617	3	976 925	546 431
04	040 000	0,999 999	54	533 263	979 140	4	989 473	451 211
0,05	0,050 000	0,999 998	0,55	0,542 628	0,977 583	1,5	0,996 085	0,353 243
06	060 000	999 997	56	551 948	975 943	6	998 959	253 916
07	070 000	999 994	57	561 219	974 219	7	999 859	154 062
08	080 000	999 990	58	570 439	972 407	8	999 998	0,054 075
09	089 999	999 984	59	579 608	970 506	9	999 999	—0,045 925
0,10	0,099 999	0,999 975	0,60	0,588 721	0,968 512	2,0	0,999 887	—0,145 915
11	109 998	999 963	61	597 776	966 424	1	999 086	—0,245 791
12	119 996	999 948	62	606 772	964 239	2	996 432	—0,345 185
13	129 994	999 929	63	615 706	961 955	3	990 202	—0,443 308
14	139 992	999 904	64	624 574	959 570	4	978 227	—0,538 818
0,15	0,149 989	0,999 873	0,65	0,633 376	0,957 082	2,5	0,958 109	—0,629 798
16	159 984	999 836	66	642 107	954 488	6	927 572	—0,713 887
17	169 979	999 791	67	650 767	951 786	7	884 919	—0,788 618
18	179 972	999 738	68	659 351	948 975	8	829 442	—0,851 901
19	189 963	999 674	69	667 858	946 053	9	761 635	—0,902 527
0,20	0,199 952	0,999 600	0,70	0,676 285	0,943 017	3,0	0,683 091	—0,940 458
21	209 939	999 514	71	684 629	939 866	1	596 105	—0,966 818
22	219 923	999 415	71	692 889	936 598	2	503 155	—0,983 577
23	229 904	999 301	73	701 060	933 213	3	406 463	—0,993 105
24	239 881	999 171	74	709 142	929 707	4	307 734	—0,997 750
0,25	0,249 854	0,999 024	0,75	0,717 132	0,926 080	3,5	208 091	—0,999 531
26	259 822	998 859	76	725 026	922 330	6	108 147	—0,999 966
27	269 785	998 673	77	732 823	918 457	7	0,008 149	—1,000 000
28	279 742	998 465	78	740 521	914 459	8	—0,091 850	—0,999 982
29	289 693	998 235	79	748 116	910 335	9	—0,191 812	—0,999 661
0,30	0,299 636	0,997 979	0,80	0,755 608	0,906 085	4,0	—0,291 534	—0,998 189
31	309 572	997 696	81	762 993	901 707			
32	319 498	997 385	82	770 270	897 201			
33	329 415	997 043	83	777 437	892 566			
34	339 321	996 669	84	784 492	887 803			
0,35	0,349 215	0,996 261	0,85	0,791 432	0,882 910			
36	359 097	995 817	86	798 256	877 888			
37	368 965	995 334	87	804 963	872 737			
38	378 818	994 811	88	811 550	867 457			
39	388 655	994 246	89	818 017	862 047			
0,40	0,398 474	0,993 637	0,90	0,824 362	0,856 509			
41	408 275	992 980	91	830 584	850 843			
42	418 056	992 275	92	836 681	845 050			
43	427 815	991 518	93	842 652	839 129			
44	437 550	990 708	94	848 498	833 083			
0,45	0,447 262	0,989 842	0,95	0,854 216	0,826 912			
46	456 947	988 918	96	859 806	820 617			
47	466 604	987 933	97	865 268	814 200			
48	476 231	986 885	98	870 601	807 662			
49	485 826	985 772	99	875 805	801 003			
0,50	0,495 388	0,984 591	1,00	0,880 880	0,794 227			

Tafel 1a.

ϱ	Sin (4) $\varrho \frac{\pi_4}{2}$	Cos (4) $\varrho \frac{\pi_4}{2}$	
0,00	0,000 000	1,000 000	1,00
05	092 703	0,999 982	95
10	185 375	999 705	90
15	277 862	998 506	85
20	369 768	995 293	80
0,25	0,460 348	0,988 578	0,75
30	548 433	976 573	70
35	632 434	957 354	65
40	710 451	929 124	60
45	780 508	890 518	55
0,50	0,840 896	0,840 896	0,50
	Cos (4) $\varrho \frac{\pi_4}{2}$	Sin (4) $\varrho \frac{\pi_4}{2}$	ϱ

$\frac{\pi_4}{2} = 1{,}854\,075$

Tafel 2.

v	Sin (6) v	Cos (6) v	v	Sin (6) v	Cos (6) v	v	Sin (6) v	Cos (6) v
0,00	0,00 000	1,000 000	0,50	0,499 075	0,997 408	1,0	0,910 046	0,869 442
01	010 000	1,000 000	51	508 938	997 083	1	951 004	799 025
02	020 000	1,000 000	52	518 784	996 724	2	976 300	715 379
03	030 000	1,000 000	53	528 612	996 330	3	989 994	623 147
04	040 000	1,000 000	54	538 419	995 898	4	996 427	526 276
0,05	0,050 000	1,000 000	0,55	0,548 204	0,995 424	1,5	0,998 983	0,427 311
06	060 000	1,000 000	56	557 965	994 906	6	999 794	327 573
07	070 000	1,000 000	57	567 700	994 342	7	999 977	227 617
08	080 000	1,000 000	58	577 405	993 726	8	0,999 999	127 621
09	090 000	1,000 000	59	587 079	993 057	9	1,000 000	0,027 621
0,10	0,100 000	1,000 000	0,60	0,596 719	0,992 330	2,0	1,000 000	—0,072 379
11	110 000	1,000 000	61	606 323	991 542	1	0,999 996	—0,172 378
12	120 000	1,000 000	62	615 887	990 690	2	999 932	—0,272 365
13	130 000	0,999 999	63	625 408	989 769	3	999 556	—0,372 261
14	140 000	0,999 999	64	634 883	988 775	4	998 154	—0,471 756
0,15	0,150 000	0,999 998	0,65	0,644 309	0,987 704	2,5	0,994 200	—0,570 011
16	160 000	999 997	66	653 682	986 553	6	985 009	—0,665 206
17	170 000	999 996	67	662 999	985 316	7	966 682	—0,754 155
18	179 999	999 994	68	672 255	983 989	8	934 792	—0,832 440
19	189 999	999 992	69	681 447	982 568	9	886 025	—0,895 642
0,20	0,199 998	0,999 989	0,70	0,690 570	0,981 049	3,0	0,819 987	—0,941 392
21	209 998	999 986	71	699 621	979 426	1	739 537	—0,970 666
22	219 997	999 981	72	708 594	977 695	2	649 230	—0,987 111
23	229 996	999 975	73	717 486	975 851	3	553 325	—0,995 158
24	239 995	999 968	74	726 292	973 891	4	454 762	—0,998 520
0,25	0,249 993	0,999 959	0,75	0,735 006	0,971 808	3,5	0,355 158	—0,999 665
26	259 990	999 949	76	743 625	969 599	6	255 234	—0,999 954
27	269 987	999 935	77	752 144	967 259	7	155 242	—0,999 998
28	279 984	999 920	78	760 557	964 783	8	0,055 243	—1,000 000
29	289 980	999 901	79	768 860	962 168	9	—0,044 757	—1,000 000
0,30	0,299 974	0,999 879	0 80	0,777 048	0,959 408	4,0	—0,144 757	—0,999 998
31	309 967	999 852	81	785 116	956 500			
32	319 959	999 821	82	793 059	953 441			
33	329 949	999 785	83	800 872	950 225			
34	339 937	999 743	84	808 551	946 850			
0,35	0,349 923	0,999 694	0,85	0,816 091	0,943 312			
36	359 907	999 637	86	823 488	939 609			
37	369 887	999 573	87	830 738	935 738			
38	379 864	999 499	88	837 835	931 695			
39	389 837	999 414	89	844 777	927 480			
0,40	0,399 805	0,999 318	0,90	0,851 560	0,923 090			
41	409 769	999 209	91	858 181	918 524			
42	419 726	999 087	92	864 636	913 780			
43	429 677	998 948	93	870 922	908 859			
44	439 621	998 793	94	877 037	903 759			
0,45	0,449 556	0,998 619	0,95	0,882 980	0,898 481			
46	459 483	998 425	96	888 747	893 024			
47	469 399	998 209	97	894 338	887 391			
48	479 304	997 969	98	899 752	881 582			
49	489 196	997 703	99	904 988	875 598			
0,50	0,499 075	0,997 408	1,00	0,910 046	0,869 442			

Tafel 2a.

ϱ	Sin (6) $\varrho \frac{\pi_6}{2}$	Cos (6) $\varrho \frac{\pi_6}{2}$	
0,00	0,000 000	1,000 000	1,00
05	096 381	1,000 000	95
10	192 761	0,999 991	90
15	289 123	999 903	85
20	385 374	999 453	80
0,25	0,481 190	0,997 920	0,75
30	575 744	993 835	70
35	667 327	984 708	65
40	753 031	967 005	60
45	828 888	936 749	55
0,50	0,890 899	0,890 899	0,50
	Cos (6) $\varrho \frac{\pi_6}{2}$	Sin (6) $\varrho \frac{\pi_6}{2}$	ϱ

$$\frac{\pi_6}{2} = 1{,}927\,621$$

Tafel 3.

v	Sin (8) v	Cos (8) v	v	Sin (8) v	Cos (8) v	v	Sin (8) v	Cos (8) v
0,00	0,000 000	1,000 000	0,50	0,499 810	0,999 512	1,0	0,928 220	0,904 736
01	010 000	1,000 000	51	509 774	999 429	1	966 843	835 053
02	020 000	1,000 000	52	519 730	999 333	2	987 003	749 301
03	030 000	1,000 000	53	529 680	999 223	3	995 715	654 735
04	040 000	1,000 000	54	539 621	999 098	4	998 847	556 422
0,05	0,050 000	1,000 000	0,55	0,549 554	0,998 956	1,5	0,999 763	0,456 837
06	060 000	1,000 000	56	559 475	998 795	6	999 967	356 912
07	070 000	1,000 000	57	569 385	998 612	7	0,999 998	256 921
08	080 000	1,000 000	58	579 281	998 406	8	1,000 000	156 922
09	090 000	1,000 000	59	589 162	998 174	9	1,000 000	0,056 922
0,10	0,100 000	1,000 000	0,60	0,599 026	0,997 912	2,0	1,000 000	—0,043 078
11	110 000	1,000 000	61	608 871	997 619	1	1,000 000	—0,143 078
12	120 000	1,000 000	62	618 695	997 291	2	0,999 998	—0,243 078
13	130 000	1,000 000	63	628 494	996 924	3	999 976	—0,343 072
14	140 000	1,000 000	64	638 267	996 515	4	999 814	—0,443 014
0,15	0,150 000	1,000 000	0,65	0,648 010	0 996 060	2,5	0,999 057	—0,542 680
16	160 000	1,000 000	66	657 721	995 554	6	996 380	—0,641 270
17	170 000	1,000 000	67	667 395	994 993	7	988 733	—0,736 590
18	180 000	1,000 000	68	677 029	994 373	8	970 586	—0,823 969
19	190 000	1,000 000	69	686 619	993 687	9	934 871	—0,896 306
0,20	0,200 000	1,000 000	0,70	0 696 160	0,992 932	3,0	0,877 151	—0,947 499
21	210 000	1,000 000	71	705 648	992 100	1	799 636	—0,977 395
22	220 000	0,999 999	72	715 078	991 187	2	709 280	—0,991 760
23	230 000	0,999 999	73	724 445	990 186	3	612 649	—0,997 497
24	240 000	0,999 999	74	733 742	989 091	4	513 601	—0,999 394
0,25	0,250 000	0,999 998	0,75	0,742 965	0,987 894	3,5	0,413 809	—0,999 892
26	259 999	999 997	76	752 106	986 589	6	313 840	—0,999 988
27	269 999	999 996	77	761 159	985 169	7	213 843	—0,999 999
28	279 999	999 995	78	770 117	983 626	8	113 843	—1,000 000
29	289 999	999 994	79	778 974	981 953	9	0,013 843	—1,000 000
0,30	0,299 998	0,999 992	0,80	0,787 721	0,980 143	4,0	—0,086 157	—1,000 000
31	309 997	999 989	81	796 351	978 187			
32	319 997	999 986	82	804 857	976 078			
33	329 995	999 982	83	813 231	973 809			
34	339 994	999 978	84	821 464	971 371			
0,35	0,349 992	0,999 972	0,85	0,829 548	0,968 758			
36	359 990	999 965	86	837 476	965 962			
37	369 987	999 956	87	845 240	962 977			
38	379 984	999 946	88	852 832	959 796			
39	389 980	999 933	89	860 244	956 412			
0,40	0,399 975	0,999 918	0,90	0,867 470	0,952 821			
41	409 968	999 900	91	874 502	949 018			
42	419 960	999 879	92	881 334	944 997			
43	429 951	999 854	93	887 960	940 756			
44	439 940	999 824	94	894 375	936 291			
0,45	0,449 926	0,999 790	0,95	0,900 574	0,931 600			
46	459 910	999 750	96	906 553	926 682			
47	469 891	999 703	97	912 310	921 536			
48	479 869	999 648	98	917 841	916 162			
49	489 842	999 585	99	923 144	910 562			
0,50	0,499 810	0,999 512	1,00	0,928 220	0,904 736			

Tafel 3a.

ϱ	Sin (8) $\varrho\frac{\pi_8}{2}$	Cos (8) $\varrho\frac{\pi_8}{2}$	
0,00	0,000 000	1,000 000	1,00
05	097 846	1,000 000	95
10	195 692	1,000 000	90
15	293 537	0,999 993	85
20	391 363	0,999 931	80
0,25	0,489 075	0,999 590	0,75
30	586 275	998 245	70
35	681 755	994 044	65
40	772 580	983 176	60
45	853 293	959 593	55
0,50	0,917 004	0,917 004	0,50
	Cos (8) $\varrho\frac{\pi_8}{2}$	Sin (8) $\varrho\frac{\pi_8}{2}$	ϱ

$\frac{\pi_8}{2} = 1{,}956\,922$

zu benützen, so sind in den Tafeln 1a bis 3a die Funktionswerte auch noch für $\varrho = 0{,}00$ bis $\varrho = 1{,}00$ dargestellt. (Vgl. Abb. 1, wo die Funktionen im Vergleich mit $\sin v$ und $\cos v$ ($n = 2$) dargestellt sind.) Wegen der großen Argumentschritte dieser Tafeln wird man im allgemeinen nicht mehr mit linearer Interpolation auskommen, wenn man für Zwischenwerte auch nur drei bis vier gültige Stellen haben will, sondern quadratisch interpolieren müssen.

Um die berechneten Tafelwerte zu sichern, haben wir jede mögliche Nachprüfung vorgenommen: Bildung der ersten und höheren Differenzen; Überwachung der Formel

$$\mathrm{Cos}^n(\mathrm{n})\, v + \mathrm{Sin}^n(\mathrm{n})\, v = 1$$

für jeden fünften Tafelwert; Berechnung der Tafelwerte für $v = \frac{1}{4}\pi_n$ gemäß der Formel

$$\mathrm{Sin}(\mathrm{n})\frac{\pi_n}{4} = \mathrm{Cos}(\mathrm{n})\frac{\pi_n}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n};$$

sowie Nachprüfung für $n = 4$ anhand des Zusammenhanges mit den *Jacobi*schen elliptischen Funktionen[1]. Alle Interpolationen sind mit der *Bessel*schen oder mit der *Stirling*schen Interpolationsformel durchgeführt[2].

---

[1] Vgl. *R. Grammel*, a. a. O. Formel (23), worin der Druckfehler: $k^2\,\mathrm{sn/dn}$ statt $k\,\mathrm{sn/dn}$ zu berichtigen ist.

[2] Vgl. *C. Runge* u. *H. König*, Vorlesungen über numerisches Rechnen, S. 108ff., Berlin 1924; oder *Fr. A. Willers*, Methoden der praktischen Analysis, S. 78ff., Berlin 1928.

(Eingegangen am 1. Dezember 1949.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Richard Grammel*, Stuttgart-N, Robert-Bosch-Straße 101.

Die Berechnung der Auftriebsverteilung elastisch verdrehbarer Tragflügel.

Von J. Weissinger.

1. Einleitung. Die Aufgabe, mittels des *Prandtl*schen Traglinienmodells die Auftriebsverteilung eines starren Tragflügels zu bestimmen, läßt sich mathematisch bekanntlich auf zwei verschiedene Arten ausdrücken: erstens nach *Prandtl*[1] in Form einer Integrodifferentialgleichung und zweitens nach *Trefftz*[2] als potentialtheoretisches Randwertproblem. Zu diesen beiden Formulierungen ist in neuerer Zeit noch eine dritte getreten: *Ziller*[3] erkannte, daß sich das Problem auch als Variationsaufgabe aussprechen läßt. Zur Lösung dieser Aufgabe verwendet *Ziller* das *Ritzsche* Verfahren unter Benutzung eines trigonometrischen Ansatzes und gelangt so zu einem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Fourierkoeffizienten der Auftriebsverteilung. Da man sich aber leicht überzeugen kann, daß dieses Gleichungssystem mit dem von *L. Lotz*[4] aufgestellten übereinstimmt[5], so ist das *Zillersche* Verfahren im Hinblick auf die numerische Durchführung mit dem *Lotz*schen identisch. Die Hauptarbeit bei diesem Verfahren macht bekanntlich nicht die Auflösung, sondern die Aufstellung des Gleichungssystems, da hierzu eine harmonische Analyse von zwei vorgegebenen Funktionen (im wesentlichen Anstellwinkel- und reziproke Tiefenverteilung) vorangehen muß. Aus diesem Grunde hat sich heute das vor einigen Jahren von *Multhopp*[6] gefundene Verfahren wohl ziemlich allgemein eingebürgert, bei dem das lineare Gleichungssystem unmittelbar gegeben ist, so daß die einzige Arbeit in der durch Iteration leicht zu bewerkstelligenden Auflösung dieses Systems liegt. Außerdem erhält man als Ergebnis nicht die Fourierkoeffizienten, sondern unmittelbar die Werte der Auftriebsverteilung an bestimmten Stellen der Spannweite.

Im zweiten Teil seiner Arbeit hat *Ziller* gezeigt, daß sein Verfahren auch auf den elastisch verdrehbaren Tragflügel, bei dem also die geometrische Anstellwinkelverteilung durch die Auftriebsverteilung beeinflußt wird, angewandt werden kann. Die numerische Durchführung allerdings ist außerordentlich mühsam, da zu den oben erwähnten noch zwei weitere harmonische Analysen hinzukommen, darunter eine nach zwei Variablen. Außerdem hat das Verfahren den Nachteil, daß es nicht allgemein anwendbar ist, sondern nur dann, wenn der Abstand des Neutralpunktes von der elastischen Achse längs der Spannweite konstant ist. Da andrerseits keine bessere Methode bekannt zu sein scheint[7], soll im folgenden ein Verfahren geschildert werden, das gegenüber dem *Zillers*chen drei Vorteile hat:

1. Es ist unbeschränkt, also für beliebige ungepfeilte Flügelformen und beliebige Lage der elastischen Achse anwendbar.

2. Es fußt unmittelbar auf dem zurzeit wohl meist gebrauchten Verfahren von *Multhopp* und kann daher mühelos von jedem, der dieses beherrscht, benutzt werden.

3. Der Rechenaufwand ist verhältnismäßig gering, nämlich nicht wesentlich größer als der des gewöhnlichen *Multhopp*schen Verfahrens.

Bei der letzten Angabe ist natürlich (ebenso wie bei *Ziller*) vorausgesetzt, daß die von der Statik zu liefernden Unterlagen, insbesondere also die Torsionseinflußlinien des Flügels, bekannt sind, wie wir uns überhaupt im folgenden auf die aerodynamische Seite der Aufgabe beschränken wollen. In Ziff. 3 wird das Verfahren allgemein entwickelt, in Ziff. 4 der Rechnungsgang an einem praktischen Beispiel erläutert.

---

[1] *L. Prandtl*, Nachr. Ges. d. Wissensch., S. 451. Göttingen 1918, S. 451.
[2] *E. Trefftz*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 206.
[3] *F. Ziller*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 239.
[4] *J. Lotz*, Z. Flugtechn. Motorl. 22 (1931), S. 189.
[5] Bis auf einen konstanten Faktor sind nämlich die *Zillers*chen B_{rn} gleich den bei *Lotz* [Gleichung (4)] auftretenden Differenzen zweier Fourierkoeffizienten $\gamma_{2\nu}$ und die C_n gleich den α_{gn}.
[6] *H. Multhopp*, Luftf.-Forschg. 15 (1938), S. 153.
[7] Mir ist nur noch das Verfahren von *G. Dätwyler*, Flugwehr u. -Technik Bd. 3 (1941), S. 65, bekannt, das aber nur mit zwei Punkten der Halbspannweite arbeitet und daher im allgemeinen zu ungenau sein dürfte.

2. Bezeichnungen. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

y Koordinate in Richtung der Spannweite ($y = 0 =$ Flügelmitte; $y = \pm \frac{b}{2} =$ Flügelenden);

$\eta = \frac{2y}{b}$ dimensionslose Koordinate;

$\vartheta = \arccos \eta$ Winkelkoordinate;

b Flügelspannweite;

F Flügelfläche;

$A = \frac{b^2}{F}$ Flügelstreckung;

$l(y)$ Flügeltiefe;

V Fluggeschwindigkeit;

ϱ Luftdichte;

$q = \frac{\varrho}{2} V^2$ Staudruck;

$c_a(y) = \frac{A(y)}{q\, l(y)}$ Beiwert des örtlichen Auftriebs $A(y)$ (pro Längeneinheit der Spannweite);

$c_M(y) = \frac{M(y)}{q l^2(y)}$ Beiwert des örtlichen Längsmoments (je Längeneinheit der Spannweite) bezogen auf die elastische Achse im Profilschnitt y, schwanzlastig positiv;

$c_{M_0}(y) = \frac{M_0(y)}{q l^2(y)}$ Beiwert des örtlichen Längsmoments bei $c_a(y) = 0$;

$\bar{c}_a = \frac{\bar{A}}{qF}$ Beiwert des Gesamtauftriebs $\bar{A}$;

$\alpha(y)$ örtlicher geometrischer Anstellwinkel (gegen die Nullauftriebsrichtung des Profilschnitts) im Bogenmaß;

$c'_{a\infty}$ Profilkonstante $\left[= \left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)_{A \to \infty}\right]$;

$\Gamma(y)$ Zirkulation um einen Profilschnitt;

$\gamma(y) = \frac{\Gamma(y)}{bV} = \frac{c_a(y)\, l(y)}{2b}$ dimensionslose Zirkulation;

$\xi(y)$ Entfernung des Profilneutralpunktes von der Profilnase dividiert durch $l(y)$;

$\varepsilon(y)$ Entfernung der elastischen Achse von der Profilnase im Profilschnitt dividiert durch $l(y)$;

Θ Torsionssteifigkeit;

$\varkappa$ ein die elastischen Eigenschaften einer Strebe charakterisierender Parameter;

$E(y, y')$ Einflußfunktion (Torsionseinflußlinien);

$E^*(y, y') = \frac{2\Theta}{b} E(y, y')$ dimensionslose Einflußfunktion;

$\beta(y)$ Verdrehwinkel;

$\beta^{(0)}(y)$ Von $M_0(y)$ herrührender Bestandteil der Verdrehwinkels.

3. Darstellung des Verfahrens. Wir betrachten einen Flügel von der Spannweite b und der Tiefenverteilung $l(y)$. Seine elastischen Eigenschaften seien in Form von Torsionseinflußlinien $E(y, y')$ bekannt. Bezeichnet dann $M(y)$ irgendeine Momentverteilung mit der elastischen Achse als Bezugspunkt, deren Entfernung von der Vorderkante im Profilschnitt an der Stelle y durch $\varepsilon(y)\, l(y)$ gegeben sei, so wird an einer beliebigen Stelle y der folgende Verdrehwinkel hervorgerufen:

$$\beta(y) = \int_{-b/2}^{b/2} E(y, y')\, M(y')\, dy' . \tag{1}$$

Wird der Flugstaudruck mit q, die Rücklage des Neutralpunktes mit $\xi(y)\, l(y)$ bezeichnet, und drückt man M durch den im Neutralpunkt angreifenden Auftrieb A und das bei $A = 0$ herrschende „Sturzflugmoment" M_0, sowie weiter A durch die dimensionslose Zirkulation $\gamma = \Gamma / bV$

aus

$$M(y) = A(y)\, l(y)\, [\varepsilon(y) - \xi(y)] + M_0(y) = 2\, q b\, \gamma(y)\, l(y)\, [\varepsilon(y) - \xi(y)] + q\, c_{M_0}(y)\, l^2(y)\,, \quad (2)$$

so geht (1) über in

$$\beta(y) = 2\, q b \int_{-b/2}^{b/2} [\varepsilon(y') - \xi(y')]\, l(y')\, E(y, y')\, \gamma(y')\, dy' + \beta^{(0)}(y)\,, \quad (3)$$

wobei der Winkel

$$\beta^{(0)}(y) = q \int_{-b/2}^{b/2} c_{M_0}(y')\, l^2(y')\, E(y, y')\, dy' \quad (4)$$

von der unbekannten Auftriebsverteilung nicht abhängt und daher zunächst als bekannt angesehen werden soll. Führt man schließlich noch die Variablen η und ϑ mittels

$$\eta = \frac{y}{b/2} = \cos\vartheta \quad (5)$$

ein, so erhält man (unter Beibehaltung der alten Funktionszeichen auch für die neuen Variablen)

$$\beta(\eta) = q b^2 \int_{-1}^{1} [\varepsilon(\eta') - \xi(\eta')]\, l(\eta')\, E(\eta, \eta')\, \gamma(\eta')\, d\eta' + \beta^{(0)}(\eta)\,, \quad (6)$$

$$\beta^{(0)}(\eta) = q\, \frac{b}{2} \int_{-1}^{1} c_{M_0}(\eta')\, l^2(\eta')\, E(\eta, \eta')\, d\eta'\,. \quad (7)$$

Das in (6) auftretende Integral kann nun sofort nach der auch von *Multhopp* benutzten Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(\eta')\, d\eta' = \frac{\pi}{m+1} \sum_{n=1}^{m} f(\eta_n) \sin\vartheta_n \qquad \left(\vartheta_n = \frac{n\pi}{m+1}\right) \quad (8)$$

ausgewertet werden. Diese Gleichung ist exakt richtig, wenn $f(\eta)$ gleich dem Produkt von $\sqrt{1-\eta^2}$ mit einem Polynom $(2m-1)$-ten Grades ist; sie liefert daher eine gute Näherung des exakten Integralwertes, wenn der Integrand sich als Produkt von $\sqrt{1-\eta^2}$ mit einer stetigen Funktion darstellen läßt. Diese Voraussetzung ist aber für den Integranden von (6) erfüllt, da sie für $\gamma(\eta')$ zutrifft und die übrigen Faktoren in allen praktisch vorkommenden Fällen stetig sein werden. Bezeichnet man also die Funktionswerte im Punkte $\eta_\nu = \cos \nu\pi/(m+1)$ abkürzend durch den Zeiger ν und entsprechend den Wert $E(\eta_\nu, \eta_n)$ mit $E_{\nu n}$, so darf man näherungsweise für (6) schreiben

$$\beta_\nu = \sum_{n=1}^{m} a_{\nu n}\, \gamma_n + \beta_\nu^{(0)} \quad (9)$$

mit

$$a_{\nu n} = \frac{\pi}{m+1}\, q b^2 l_n\, (\varepsilon_n - \xi_n)\, E_{\nu n} \sin\vartheta_n\,. \quad (10)$$

Damit ist bereits alles Nötige für die Anwendung des *Multhopp*schen Verfahrens vorhanden. Die elastische Verdrehbarkeit des Flügels hat zur Folge, daß in der *Prandtl*schen Integrodifferentialgleichung der Anstellwinkel α um den Verdrehwinkel β vermehrt werden muß; d. h. statt des im starren Fall mit der *Prandtl*schen Gleichung äquivalenten *Multhopp*schen Gleichungssystems

$$b_\nu \gamma_\nu = \alpha_\nu + \sum_{n=1}^{m}{}' b_{\nu n}\, \gamma_n \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \quad (11)$$

bekommt man jetzt

$$b_\nu \gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu + \sum_{n=1}^{m}{}' b_{\nu n}\, \gamma_n\,, \quad (12)$$

und wenn man hier den Ausdruck (9) einführt, so ergibt sich

$$b_\nu^* \gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu^{(0)} + \sum_{n=1}^{m} b_{\nu n}^*\, \gamma_n \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \quad (13)$$

mit

$$b_\nu^* = b_\nu - a_{\nu\nu}, \quad b_{\nu n}^* = b_{\nu n} + a_{\nu n}\,. \quad (14)$$

Man erhält also das neue Gleichungssystem (13) zur Bestimmung der γ_n einfach dadurch, daß man in (11) den Anstellwinkel α durch $\alpha + \beta^{(0)}$ und die *Multhopp*schen Koeffizienten b durch die b^* nach (14) ersetzt, wobei die a nach (10) zu berechnen sind. Das System (13) kann auch nach derselben Iterationsmethode wie (11) aufgelöst werden, vorausgesetzt, daß der Verdrehwinkel nicht allzu groß wird. Der einzige formale Unterschied zwischen (11) und (13) besteht darin, daß eine Anzahl der $b_{\nu n}$ stets Null ist, während die entsprechenden $b^*_{\nu n}$ nicht verschwinden müssen.

Durch diesen Umstand ist eine kleine Modifikation in der numerischen Auflösung von (13) bedingt. Während man nämlich bei *Multhopp* zu Beginn der Iteration eine nullte Näherung lediglich für die Werte mit geradem Zeiger $n = 2n'$ zu kennen braucht, ist bei (13) eine nullte Näherung für alle γ_n erforderlich. Für gerade Zeiger bekommt man diese wie bei *Multhopp* durch Auflösung des Gleichungssystems mit $\frac{1}{2}(m-1)$ Punkten, und indem man den Funktionsverlauf über η an Hand dieser Werte aufzeichnet, kann man sich auch die fehlenden Punkte durch Ablesen beschaffen.

Im Falle, daß die Verteilung $\alpha + \beta^{(0)}$ symmetrisch oder antisymmetrisch (und natürlich der Flügel symmetrisch) ist, läßt sich das Gleichungssystem (13) ebenso wie das *Multhopp*sche weiter vereinfachen. Zu dem Zweck setze man

$$A^{(+)}_{\nu n} = \begin{cases} a_{\nu n} & \text{für } n = \dfrac{m+1}{2}, \\ a_{\nu n} + a_{\nu, m+1-n} & \text{für } n \neq \dfrac{m+1}{2}, \end{cases} \tag{15}$$

bzw.

$$A^{(-)}_{\nu n} = a_{\nu n} - a_{\nu, m+1-n} \tag{16}$$

und bilde mit den *Multhopp*schen $B_{\nu n}$, $C_{\nu n}$ die Koeffizienten

$$B^*_{\nu n} = B_{\nu n} + A^{(+)}_{\nu n}, \tag{17}$$

bzw.

$$C^*_{\nu n} = C_{\nu n} + A^{(-)}_{\nu n}. \tag{18}$$

Dann lautet das Gleichungssystem im symmetrischen Falle

$$b^*_\nu \gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta^{(0)}_\nu + \sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}} B^*_{\nu n} \gamma_n \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{m+1}{2}\right) \tag{19}$$

und im antisymmetrischen Falle

$$b^*_\nu \gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta^{(0)}_\nu + \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C^*_{\nu n} \gamma_n \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right). \tag{20}$$

Eine beliebige Verteilung läßt sich in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Bestandteil aufspalten.

Die Einflußfunktion $E(\eta_j, \eta_j')$ hat im allgemeinen die Eigenschaft, daß sie für Wertepaare η_j, η_j' mit entgegengesetztem Vorzeichen verschwindet. Dann vereinfacht sich (15) zu

$$A^{(+)}_{\nu n} = a_{\nu n}. \tag{15a}$$

Der „Nullverdrehwinkel" $\beta^{(0)}(\eta_j)$ spielt für die Berechnung der Auftriebsverteilung dieselbe Rolle wie der Anstellwinkel α, ist allerdings im Unterschied zu diesem nicht unmittelbar gegeben, sondern muß nach (7) erst berechnet werden. In den meisten Fällen wird sich das Integral (7) explizit ausrechnen lassen, sonst muß man sich die Werte $\beta^{(0)}_\nu$ durch graphische oder numerische Integration beschaffen.

Schließlich noch eine kurze Bemerkung über die Konvergenz des Iterationsverfahrens zur Lösung von (13). Während sich für (11) die Konvergenz allgemein beweisen läßt[1], ist dies für (13) nicht möglich und auch nicht richtig; denn wenn die $a_{\nu n}$ sehr groß sind, der Flügel also sehr weich ist, so wird der Diagonalkoeffizient b^*_ν keineswegs mehr groß gegenüber den $b^*_{\nu n}$ sein. Die Anwendbarkeit des Iterationsverfahrens prüft man am besten mit Hilfe des bekannten „Zeilen-

[1] Vgl. *H. Multhopp*, a. a. O. Abschn. VI.

kriteriums“

$$\sum_{\mu=1}^{m}{}' |b^*_{\nu\mu}| < |b^*_\nu| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{21}$$

nach. Entsprechendes gilt für die Gleichungssysteme (19) und (20).

4. Ein Beispiel. Im folgenden soll das in Ziff. 3 geschilderte Verfahren an einem praktischen Beispiel erläutert werden. Der betrachtete Flügel hat rechteckigen Grundriß und läßt sich als Torsionsröhre auffassen. Die Torsionsmomente in Flügelmitte werden vom Rumpf aufgenommen, dessen Breite vernachlässigt wird, so daß also die Einflußfunktion $E(y, y')$ für Wertepaare y, y' von entgegengesetztem Vorzeichen sowie für $y = 0$ oder $y' = 0$ verschwindet. An der Stelle $y = y_0 = \eta_0 \frac{b}{2}$ (bzw. $y = -y_0$) ist der Flügel abgestrebt.

Wenn man nur symmetrische oder antisymmetrische Verteilungen ins Auge faßt, aus denen sich ja eine beliebige Verteilung durch Überlagerung gewinnen läßt, so kann man sich von vornherein auf die Betrachtung einer Flügelhälfte, etwa $y \geqq 0$, beschränken; und da $E(y, y')$ für $y' \leqq 0$ gleich Null ist, so darf man auch $y' \geqq 0$ annehmen. Dann lehrt die Statik, daß $E(y, y')$ als Funktion einer der beiden Variablen (etwa y') betrachtet, die Form eines doppelt geknickten Streckenzuges hat. Die Knickstellen liegen bei $y' = y$ und $y' = y_0$. Für die Rechnung empfiehlt sich die Einführung der dimensionslosen Einflußfunktion

$$E^*(\eta, \eta') = \frac{\Theta}{b/2} E(y, y'), \tag{22}$$

wobei Θ die Torsionssteifigkeit des Flügels bedeutet. Indem wir schließlich noch eine von den geometrischen und elastischen Eigenschaften der Strebe abhängige Zahl $\varkappa$ einführen, erhalten wir auf Grund einer einfachen statischen Betrachtung die folgenden Definitionsgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{a) für } 0 \leqq \eta \leqq \eta_0: & \\
\quad 1.\ 0 \leqq \eta' \leqq \eta \leqq \eta_0: & E^*(\eta, \eta') = \left(1 - \frac{\varkappa}{\eta_0}\eta\right)\eta', \\
\quad 2.\ 0 \leqq \eta \leqq \eta' \leqq \eta_0: & = \left(1 - \frac{\varkappa}{\eta_0}\eta'\right)\eta, \\
\quad 3.\ 0 \leqq \eta \leqq \eta_0 \leqq \eta': & = (1 - \varkappa)\eta, \\
\text{b) für } 0 \leqq \eta_0 \leqq \eta & \\
\quad 1.\ 0 \leqq \eta' \leqq \eta_0 \leqq \eta: & E^*(\eta, \eta') = (1 - \varkappa)\eta', \\
\quad 2.\ 0 \leqq \eta_0 \leqq \eta' \leqq \eta: & = \eta' - \varkappa\eta_0, \\
\quad 3.\ 0 \leqq \eta_0 \leqq \eta \leqq \eta': & = \eta - \varkappa\eta_0.
\end{array}\right. \tag{23}$$

Ist keine Strebe vorhanden, so ist $\varkappa = 0$ zu setzen.

Da $l(\eta)$ konstant ist und wir im folgenden auch nur konstantes $c_{M_0}(\eta)$ betrachten wollen, so läuft die Berechnung von $\beta^{(0)}(\eta)$ nach (7) auf die Integration von $E^*(\eta, \eta')$ hinaus, die sich elementar ausführen läßt. Das Ergebnis lautet

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{a) für } 0 \leqq \eta \leqq \eta_0: & \int_0^1 E^*(\eta, \eta')\, d\eta' = \eta\left\{\frac{\varkappa\eta_0 - \eta}{2} + 1 - \varkappa\right\} \\
\text{b) für } 0 \leqq \eta_0 \leqq \eta: & \int_0^1 E^*(\eta, \eta')\, d\eta' = \frac{\varkappa\eta_0^2 - \eta^2}{2} + \eta - \varkappa\eta_0.
\end{array}\right. \tag{24}$$

Damit sind alle für die Berechnung der Auftriebsverteilung notwendigen statischen Unterlagen bereitgestellt.

Der der Rechnung zugrundegelegte Flügel ist durch folgende Zahlenangaben gekennzeichnet:

$b = 14{,}50$ m, $\quad l = 1{,}65$ m (also $F = 23{,}42$ m^2; $\Lambda = 8{,}98$),
$c'_{a\,\alpha} = 6{,}0$, $\quad \varepsilon = 0{,}334$, $\quad \xi = 0{,}235$, $\quad \eta_0 = 0{,}608$,
$\Theta = 76300$ kg m^2, $\quad \varkappa = 0{,}1023$.

Verwindung ist nicht vorhanden. Der Flugstaudruck sei $q = 565$ kg m^2. Das *Multhopp*sche Verfahren wird mit $m = 15$ angesetzt.

Zunächst hat man nach (23) die Werte $E^*_{\nu n}$ zu berechnen. Das Ergebnis ist in Tabelle 1 enthalten. Man erkennt, daß es sich nicht um 64, sondern nur um 13 auszurechnende Werte handelt.

Aus den $E^*_{\nu n}$ ergeben sich nach (10) die Größen

$$a_{\nu n} = \frac{\pi}{2(m+1)} \frac{q b^3 l}{\Theta} (\varepsilon - \xi) \sin \vartheta_n E^*_{\nu n} = 0{,}3621 \sin \vartheta_n E^*_{\nu n} \tag{25}$$

— Tabelle 2, aus denen man nach (14) bzw. (17) und (15a) die Koeffizienten b^*_ν bzw. $B^*_{\nu n}$ des linearen Gleichungssystems (19) erhält — Tabelle 3. Da die Bedingung (21) erfüllt ist, konvergiert das Iterationsverfahren und zwar ungefähr genau so schnell wie für den starren Flügel.

Tabelle 1. Die Werte $E_{\nu n}$ nach (23).

	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8
$\nu=1$	0,9186	0,8617	0,7693	0,6449	0,4988	0,3435	0,1751	0
2	0,8617	0,8617	0,7693	0,6449	0,4988	0,3435	0,1751	0
3	0,7693	0,7693	0,7693	0,6449	0,4988	0,3435	0,1751	0
4	0,6449	0,6449	0,6449	0,6449	0,4988	0,3435	0,1751	0
5	0,4988	0,4988	0,4988	0,4988	0,5037	0,3469	0,1769	0
6	0,3435	0,3435	0,3435	0,3435	0,3469	0,3581	0,1825	0
7	0,1751	0,1751	0,1751	0,1751	0,1769	0,1825	0,1887	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 2. Die Werte $a_{\nu n}$ nach (25).

	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8
$\nu=1$	0,0649	0,1194	0,1548	0,1651	0,1502	0,1149	0,0622	0
2	0,0608	0,1194	0,1548	0,1651	0,1502	0,1149	0,0622	0
3	0,0543	0,1066	0,1548	0,1651	0,1502	0,1149	0,0622	0
4	0,0455	0,0894	0,1298	0,1651	0,1502	0,1149	0,0622	0
5	0,0352	0,0691	0,1004	0,1277	0,1517	0,1160	0,0628	0
6	0,0243	0,0476	0,0691	0,0879	0,1045	0,1198	0,0648	0
7	0,0124	0,0243	0,0352	0,0488	0,0533	0,0610	0,0670	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

Im Falle $c_{M_0} \neq 0$ sind schließlich noch die Zahlen

$$\int_0^1 E^*(\eta_\nu, \eta')\, d\eta'$$

nach (24) auszurechnen und hieraus nach (7) der Verlauf des Nullverdrehwinkels

$$\beta^{(0)}_\nu = c_{M_0} \frac{q b^2 l^2}{4\Theta} \int_0^1 E^*(\eta_\nu, \eta')\, d\eta'$$

$$= 1{,}0596\, c_{M_0} \int_0^1 E^*(\eta_\nu, \eta')\, d\eta' . \tag{26}$$

Für $c_{M_0} = 1$ können diese Werte aus Tabelle 4 entnommen werden.

Nunmehr kann die Auftriebsverteilung zu beliebig vorgegebenem $\alpha(\eta)$ und c_{M_0} berechnet werden. Da der Flügel unverwunden sein soll, ist α konstant längs der Spannweite. Dann läßt sich eine beliebige Auftriebsverteilung linear überlagern aus den beiden Verteilungen $\gamma^{(1)}$ und $\gamma^{(0)}$ die zu $\alpha = 1$, $c_{M_0} = 0$ und zu $\alpha = 0$, $c_{M_0} = 1$ gehören und die daher einzig berechnet zu werden

Tabelle 3. Die Koeffizienten b^*_ν und $B^*_{\nu n}$ des linearen Gleichungssystems (19).

b^*_ν		$n=1$	2	3	4	5	6	7	8
23,4314	$\nu=1$	—	7,5118	0,1548	0,7706	0,1502	0,3074	0,0622	0,0650
13,3264	2	3,8295	—	4,2322	0,1651	0,5571	0,1149	0,2266	0
10,0383	3	0,0543	2,9152	—	3,0413	0,1502	0,4408	0,0622	0,0904
8,4850	4	0,2126	0,0894	2,3896	—	2,4460	0,1149	0,3713	0
7,6523	5	0,0352	0,2563	0,1004	2,0800	—	2,1135	0,0628	0,2025
7,2030	6	0,0650	0,0476	0,2651	0,0879	1,9021	—	1,9902	0
7,0049	7	0,0124	0,0884	0,0352	0,2677	0,0533	1,8749	—	1,6422
6,9933	8	0,0254	0	0,1005	0	0,3368	0	3,2210	—

brauchen. Das Ergebnis ist in Abb. 1 und 2 aufgezeichnet. In Abb. 1 ist zum Vergleich auch die Auftriebsverteilung des starren Flügels eingetragen. Ein merklicher Einfluß der Elastizität auf die Form der Verteilung ist erkennbar, und zwar im Sinne einer Verschiebung des Auftriebs nach außen. Der Gesamtauftrieb wächst um 15%. Aus der Kenntnis der Auftriebsverteilung kann nach (9) auch der Verlauf des Verdrehwinkels gewonnen werden, der für $\alpha = 1$, $c_{M_0} = 0$ aus Abb. 3 zu ersehen ist. Danach beträgt in unserem Beispiel die elastische Verwindung am Flügelende fast $^1/_4$ des Anstellwinkels. Übrigens läßt sich ein häufig schon ausreichender Überblick über den Verlauf des Verdrehwinkels gewinnen, wenn man in (9) einfach die nach *Multhopp* berechnete Auftriebsverteilung des starren Flügels einsetzt. Zum Vergleich ist auch dieser Verlauf in Abb. 3 eingezeichnet.

Tabelle 4. Der Nullverdrehwinkel $\frac{1}{c_{M_0}} \beta^{(0)}(\eta_\nu)$ nach (26).

	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{c_{M_0}} \beta^{(0)}_\nu$	0,4837	0,4808	0,4689	0,4385	0,3833	0,2990	0,1719	0

Im allgemeinen wird außer dem Staudruck q (und der Profilkonstanten c_{M0}) auch noch ein bestimmter Beiwert $\bar{c}_a$ des Gesamtauftriebs vorgeschrieben sein. Die zugehörige Auftriebsverteilung läßt sich mittels der beiden Gesamtauftriebsbeiwerte $\bar{c}_a^{(0)}$ und $\bar{c}_a^{(1)}$, die zu den beiden Grundverteilungen $\gamma^{(0)}$ und $\gamma^{(1)}$ gehören und nach der *Multhopp*schen Formel

$$\bar{c}_a = \frac{\pi \Lambda}{m+1} \sum_{n=1}^{m} \gamma_n \sin \vartheta_n \tag{27}$$

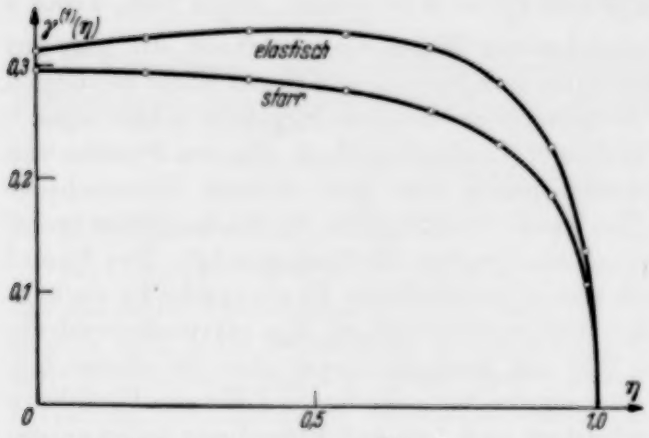


Abb. 1. Die Auftriebsverteilung $\gamma^{(1)}(\eta)$ $[\alpha = 1,\ c_{M_0} = 0]$ des elastischen und des starren Flügels.

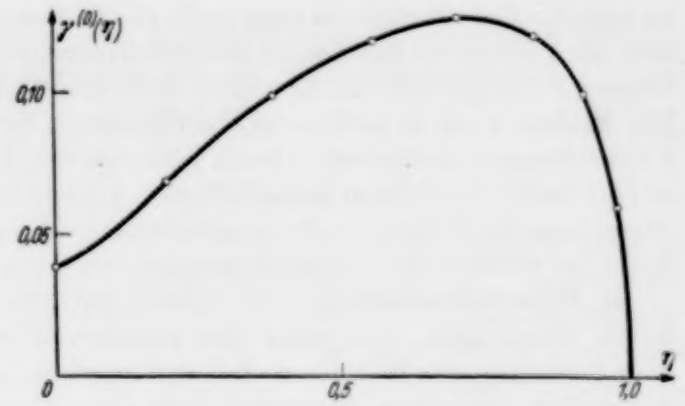


Abb. 2. Die Auftriebsverteilung $\gamma^{(0)}(\eta)$ bei $\alpha = 0$, $c_{M_0} = 1$.

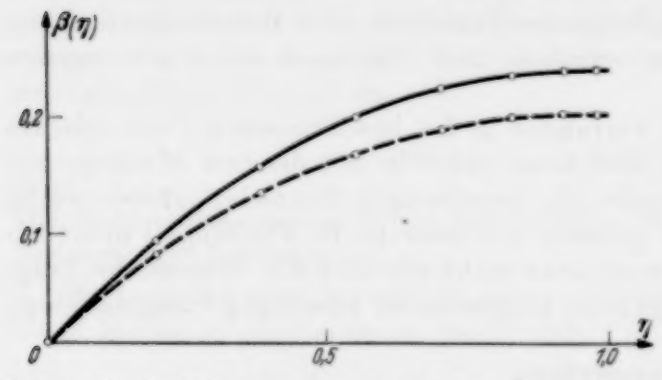


Abb. 3. Die elastische Verwindung $\beta(\eta)$ bei $\alpha = 1$, $c_{M_0} = 0$. Gestrichelt die aus der Auftriebsverteilung des starren Flügels nach (9) erhaltene Näherung.

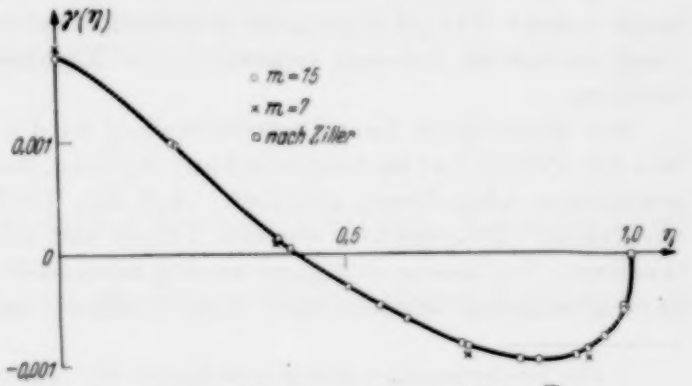


Abb. 4. Die Auftriebsverteilung $\gamma(\eta)$ bei $\bar{c}_a = 0$.

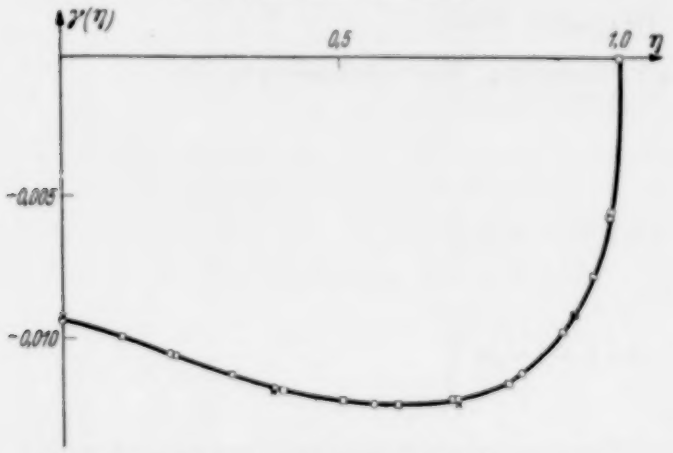


Abb. 4. Die Auftriebsverteilung $\gamma(\eta)$ bei $\bar{c}_a = -0{,}197$.

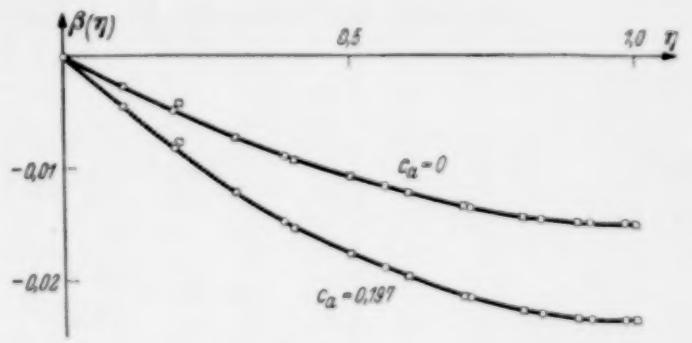


Abb. 6. Die elastische Verwindung $\beta(\eta)$ bei $\bar{c}_a = 0$ und $\bar{c}_a = -0{,}197$.

zu bestimmen sind, allgemein angeben. Sie lautet

$$\gamma(\eta) = c_{M0}\left(\gamma^{(0)} - \frac{\bar{c}_a^{(0)}}{\bar{c}_a^{(1)}}\gamma^{(1)}\right) + \frac{\bar{c}_a}{\bar{c}_a^{(1)}}\gamma^{(1)}, \tag{28}$$

wie man leicht bestätigt. Als zugehörigen Anstellwinkel findet man

$$\alpha = \frac{\bar{c}_a}{\bar{c}_a^{(1)}} - c_{M0}\frac{\bar{c}_a^{(0)}}{\bar{c}_a^{(1)}}, \tag{29}$$

und der Auftriebsgradient $d\bar{c}_a/d\alpha$ des elastischen Flügels ist durch

$$\frac{d\bar{c}_a}{d\alpha} = \bar{c}_a^{(1)} \tag{30}$$

gegeben.

Im vorliegenden Beispiel war für c_{M_0} der Wert $-0{,}03$ vorgeschrieben und die Auftriebsverteilung sollte (bei $q = 565\ \mathrm{kg/m^2}$) zu den Beiwerten $\bar{c}_a = 0$ und $\bar{c}_a = -0{,}197$ berechnet werden. Das Ergebnis, das man auf Grund von (28) mit $\bar{c}_a^{(0)} = 1{,}71$ und $\bar{c}_a^{(1)} = 5{,}51$ erhält, ist in Abb. 4 und 5 zu sehen. Zum Vergleich sind auch die mit $m = 7$ errechneten Werte eingezeichnet, die sehr gut mit der genaueren Rechnung übereinstimmen, so daß man sich bereits mit ihnen hätte begnügen können. Schließlich ist das nach dem *Ziller*schen Verfahren gewonnene Ergebnis eingetragen[1]. Die Reihen wurden nach dem Koeffizienten mit dem Zeiger 11 abgebrochen, also ein System von 6 Gleichungen aufgelöst. Auch hier ist die Übereinstimmung sehr gut. Kleine Unterschiede weisen beide Verfahren hinsichtlich der elastischen Verwindung auf (Abb. 6), die bei *Ziller* nicht, wie es sein muß, für $\eta = 0$ verschwindet und im übrigen eine leichte Welligkeit zeigt. Der Grund dafür ist wohl in der Approximation von $\beta(\eta)$ durch eine abgebrochene Fourierreihe zu suchen.

5. Zusammenfassung. Die Arbeit untersucht die Auftriebsverteilung des elastisch verdrehbaren Tragflügels, und zwar den aerodynamischen Teil der Aufgabe, setzt also die elastischen Eigenschaften des Flügels als bekannt voraus. Zur Lösung der Aufgabe hatte *Ziller* ein Verfahren angegeben, das einen beträchtlichen Zeitaufwand erfordert und nur auf Flügel mit konstantem Abstand zwischen elastischer Achse und Neutralpunktslinie anwendbar ist. Das vorstehend beschriebene Verfahren vermeidet diese Nachteile und schließt sich außerdem unmittelbar an das beim starren Flügel allgemein gebräuchliche *Multhopp*sche Verfahren an. Der Rechnungsgang wird an einem Beispiel erläutert, die Ergebnisse stimmen mit den nach *Ziller* gewonnenen überein.

Bei unstetigem Anstellwinkelverlauf wird das Verfahren in der beschriebenen Form (ebenso wie das *Ziller*sche) zu langsam konvergieren, man muß dann vielmehr mit der von *Multhopp* angegebenen Abspaltung arbeiten. Auf die Wiedergabe des zugehörigen Formelapparates wurde verzichtet. Desgleichen wurden Flügel mit nicht gerader $l/4$-Linie (z. B. Pfeilflügel) nicht betrachtet. Sie lassen sich ganz analog behandeln, wenn man nicht wie hier die *Prandtl*sche Tragliniengleichung, sondern eine vom Verfasser angegebene allgemeinere Gleichung[2] zugrundelegt.

---

[1] Die Rechnungen wurden von Herrn *W. Richter* ausgeführt.

[2] J. *Weissinger*, Math. Nachr. 2 (1949), S. 45.

(Eingegangen am 9. Dezember 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *J. Weissinger*, Hamburg, Harvestehuderweg 10.

Über eine Anwendung der Fouriertransformation in der Elastizitätstheorie*.

Von H. Jung.

1. Einleitung. Die Berechnung der Spannungen und Formänderungen kann beim ebenen Spannungszustand sowie beim ebenen Verzerrungszustand auf die Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta F(x, y) \equiv \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \tag{1}$$

zurückgeführt werden, wobei $F(x, y)$ die *Airy*sche Spannungsfunktion ist.

Im folgenden wird in Ziff. 2 gezeigt, daß sich durch die Anwendung der Fouriertransformation die *Airy*sche Spannungsfunktion direkt aus den Randbedingungen berechnen läßt. Damit werden in Ziff. 3 die bekannten Lösungen für die Halbscheibe und den unendlich langen Streifen mit Normalbelastung auf neuem und einfacherem Weg hergeleitet. Außerdem läßt sich so, wohl erstmalig, die Lösung für den unendlich langen Streifen mit Tangentialbelastung angeben (Ziff. 4). Wie daraus auf einfache Weise die Lösungen weiterer wichtiger Probleme gefunden werden können, wird in Ziff. 5 am Beispiel des durch eine Einzelkraft im Innern belasteten Streifens gezeigt.

2. Transformation der Differentialgleichung und der Randbedingungen. Liegt ein ebener Spannungszustand vor, so erhält man in bekannter Weise[1] die Spannungen aus der *Airy*schen Spannungsfunktion $F(x, y)$ zu

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{2}$$

Die Spannungsfunktion ist ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (1), das die Randbedingungen befriedigt.

Multipliziert man (1) und (2) mit $e^{-i\lambda x}$ und setzt nun voraus, daß die Integrale über x von $-\infty$ bis $+\infty$ existieren, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} e^{-i\lambda x} dx + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} e^{-i\lambda x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} e^{-i\lambda x} dx = 0, \tag{1a}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x e^{-i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} e^{-i\lambda x} dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y e^{-i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-i\lambda x} dx &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} e^{-i\lambda x} dx. \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

Unter geeigneten Voraussetzungen über $F(x, y)$ gilt:

1. die Differentiation nach y ist mit der Integration nach x vertauschbar,
2. bei den partiellen Integrationen nach x verschwinden die integralfreien Teile.

Dann erhält man aus (1a) und (2a)

$$\lambda^4 \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) e^{-i\lambda x} dx - 2\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) e^{-i\lambda x} dx + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) e^{-i\lambda x} dx = 0, \tag{3}$$

---

* Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. *R. Grammel* zum 60. Geburtstag gewidmet.

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 140. Berlin 1939.

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_x e^{-i\lambda x}dx &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\,e^{-i\lambda x}dx\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_y e^{-i\lambda x}dx = -\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\,e^{-i\lambda x}dx\,,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\tau e^{-i\lambda x}dx &= i\lambda\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)e^{-i\lambda x}dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Führt man nun in (3) ind (4) die Fouriertransformation[1]

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)e^{-i\lambda x}dx = f(\lambda,y)\,,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,y)e^{i\lambda x}d\lambda = F(x,y)\,,\\ &\text{in Zeichen}\\ &F(x,y)\to f(\lambda,y),\qquad f(\lambda,y)\to F(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ein, so erhält man

$$\Delta\Delta F(x,y) = 0 \to \lambda^4 f(\lambda,y) - 2\lambda^2\frac{d^2f(\lambda,y)}{dy^2} + \frac{d^4f(\lambda,y)}{dy^4} = 0\,, \tag{3a}$$

$$\sigma_x \to \frac{d^2f(\lambda,y)}{dy^2}\,,\quad \sigma_y \to -\lambda^2 f(\lambda,y)\,,\quad \tau\to i\lambda\frac{df(\lambda,y)}{dy}\,. \tag{4a}$$

Durch die Transformation (5) wird die Funktion $F(x,y)$ vom Oberreich (x,y) auf den Unterbereich (λ,y) abgebildet.

Sind auf Rändern y-konst. die Spannungen vorgegeben und lassen sich diese Spannungen in den Unterbereich transformieren, so ist durch (3a) und (4a) ein einfaches Randwertproblem gegeben.

Die allgemeine Lösung von (3a) ist bekannt und lautet:

$$f(\lambda,y) = [A_0(\lambda) + y\,A_1(\lambda)]e^{-\lambda y} + [B_0(\lambda) + y\,B_1(\lambda)]e^{\lambda y}. \tag{6}$$

Die Funktionen $A_i(\lambda)$ und $B_i(\lambda)$ lassen sich aus den in den Unterbereich transformierten Randbedingungen ermitteln.

Durch Rücktransformation (5) erhält man aus (6) die Spannungsfunktion für die auf Rändern y-konst. belastete Scheibe $(-\infty \le x \le +\infty)$

$$F(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\{[A_0(\lambda) + y\,A_1(\lambda)]\,e^{-\lambda y} + [B_0(\lambda) + y\,B_1(\lambda)]e^{\lambda y}\}e^{i\lambda x}d\lambda\,. \tag{7}$$

Aus (7) lassen sich rein formal die Spannungen angeben. Es ist

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\lambda^2 f(\lambda,y) - 2\lambda(A_1e^{-\lambda y} - B_1e^{\lambda y})]e^{i\lambda x}d\lambda\,,\\ \sigma_y &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 f(\lambda,y)e^{i\lambda x}d\lambda\,,\\ \tau &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\{-\lambda^2[A_0(\lambda)+y\,A_1(\lambda)]e^{-\lambda y} + \lambda^2[B_0(\lambda)+y\,B_1(\lambda)]e^{\lambda y}\\ &\qquad + \lambda A_1e^{-\lambda y} + \lambda B_1e^{\lambda y}\}e^{i\lambda x}d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Da einfach zusammenhängende Bereiche vorliegen $(-\infty \le x \le +\infty)$, können die Verschiebungen u und v in der x- und y-Richtung aus den Beziehungen[2]

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y\right),\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_x\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

bestimmt werden.

[1] *W. Magnus* u. *F. Oberhettinger*, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematik und Physik, S. 160, 2. Aufl. Berlin 1948.

[2] Siehe Fußnote 2 auf S. 263.

Geht man mit (8) in (9) ein und integriert, so erhält man die Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{i}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{m-1}{m}\lambda f(\lambda, y) - 2\left[A_1(\lambda)e^{-\lambda y} - B_1(\lambda)e^{\lambda y}\right]\right\} e^{i\lambda x}\, d\lambda\,, \\ v &= \frac{1}{2\pi E m}\int_{-\infty}^{+\infty}\{-(m-1)\left[\left(A_0(\lambda)+y A_1(\lambda)\right)\right]\lambda e^{-\lambda y} - \left(B_0(\lambda)+y B_1(\lambda)\right)\lambda e^{\lambda y} \\ &\qquad -(m+1)\left[A_1(\lambda)e^{-\lambda y} + B_1(\lambda)e^{\lambda y}\right]\} e^{i\lambda x}\, d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Sind auf Rändern y-konst. die Verschiebungen vorgeschrieben, so können die Funktionen $A_i(\lambda)$ und $B_i(\lambda)$ aus (10) durch Umkehrung der Fouriertransformation bestimmt werden.

Die durch (7) gegebene Spannungsfunktion eignet sich besonders zur Behandlung von Belastungsfällen der Halbscheibe. Für den unendlich langen Streifen nimmt man die Lösung von (3a) in der Form an

$$f(\lambda, y) = a_1(\lambda)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + a_2(\lambda)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + y\left[a_3(\lambda)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + a_4(\lambda)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\right]. \tag{6a}$$

Aus (6a) ergeben sich dann die Spannungsfunktion und die Spannungen

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[a_1(\lambda)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + a_2(\lambda)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + a_3(\lambda)\,y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + a_4(\lambda)\,y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\right] e^{i\lambda x}\, d\lambda\,, \tag{7a}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\lambda^2 f(\lambda, y) + 2\lambda\left(a_3(\lambda)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + a_4(\lambda)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\right)\right] e^{i\lambda x}\, d\lambda\,,$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 f(\lambda, y)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda\,,$$

$$\tau = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\lambda^2\left(a_1(\lambda)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + a_2(\lambda)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + a_3(\lambda)\,y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + a_4(\lambda)\,y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\right)\right.$$
$$\left. + a_3(\lambda)\,\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + a_4(\lambda)\,\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\right] e^{i\lambda x}\, d\lambda\,.$$

Für die Verschiebungen erhält man entsprechende Ausdrücke. Bei den einzelnen Belastungsfällen ist jeweils zu zeigen, daß die in (7), (8) und (10) auftretenden Integrale gleichförmig in x und y konvergieren, um die angegebene Herleitung der Lösung zu sichern. Der Vorteil dieser Methode gegenüber der einseitigen Laplacetransformation ist der, daß durch die Fouriertransformation eine eindeutige Rücktransformation gegeben ist.

3. Die Halbscheibe und der unendlich lange Streifen unter Normalbelastung. Die elastische, isotrope Halbscheibe werde an ihrem Oberrand $y = 0$ durch eine Normalbelastung beansprucht (Abb. 1). Die Randbedingungen für diesen Belastungsfall sind

$$y = 0 \;:\sigma_y = \psi_1(x)\,, \tag{11}$$

$$y = 0 \;:\; \tau = 0\,. \tag{12}$$

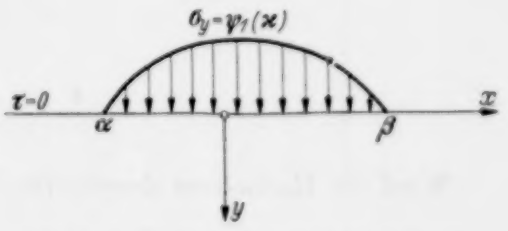


Abb. 1. Halbscheibe mit Normalbelastung.

Transformiert man die Belastung $\psi_1(x)$ in den Unterbereich, so gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = -\lambda^2\varphi_1(\lambda)\,. \tag{13}$$

Mit (13) werden die Randwerte im Unterbereich gemäß (4a)

$$y = 0 \;: f(\lambda, 0) = \varphi_1(\lambda), \frac{d}{dy} f(\lambda, 0) = 0\,. \tag{14}$$

Um handliche Integrale für die Spannungen zu bekommen, werde die Unterfunktion für die Spannungsfunktion wie folgt angesetzt:

$$f(\lambda, y) \equiv f_1(\lambda, y) + f_2(\lambda, y)$$

mit

$$f_1(\lambda, y) \equiv \begin{cases} A_0(\lambda) e^{-\lambda y} + A_1(\lambda) y e^{-\lambda y} & \text{für } \lambda \geqq 0\,, \\ 0 & \text{für } \lambda < 0\,, \end{cases}$$

$$f_2(\lambda, y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda > 0\,, \\ B_0(\lambda) e^{\lambda y} + B_1(\lambda) y e^{\lambda y} & \text{für } \lambda \leqq 0\,. \end{cases}$$

Aus den Randbedingungen (14) erhält man

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \varphi_1(\lambda)\,, \quad & A_1 &= \lambda \varphi_1(\lambda)\,, \\ B_0 &= \varphi_1(\lambda)\,, \quad & B_1 &= -\lambda \varphi_1(\lambda)\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Geht man mit (15) und (13) in (8) ein, so werden die Spannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda y - 1)\, \psi_1(\xi)\, e^{-\lambda(y + i(\xi - x))}\, d\xi\, d\lambda \right. \\ &\qquad \left. + \int_0^{-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda y + 1)\, \psi_1(\xi)\, e^{\lambda(y - i(\xi - x))}\, d\xi\, d\lambda \right], \\ \sigma_y &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda y + 1)\, \psi_1(\xi) e^{-\lambda(y + i(\xi - x))}\, d\xi\, d\lambda \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^{-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda y - 1)\, \psi_1(\xi)\, e^{\lambda(y - i(\xi - x))}\, d\xi\, d\lambda \right], \\ \tau &= -\frac{i}{2\pi}\left[\int_0^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \lambda y \psi_1(\xi) e^{-\lambda(y + i(\xi - y))}\, d\xi\, d\lambda \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^{-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \lambda y \psi_1(\xi) e^{+\lambda(y - i(\xi - x))}\, d\xi\, d\lambda \right]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

In (16) vertauscht man die Integrationsfolge und erhält die schon von *Föppl* abgeleiteten Integrale[1]

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{y(\xi - x)^2}{[y^2 + (\xi - x)^2]^2}\, \psi_1(\xi)\, d\xi\,, \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{y^3}{[y^2 + (\xi - x)^2]^2}\, \psi_1(\xi)\, d\xi\,, \\ \tau &= \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\xi - x) y^2}{[y^2 + (\xi - x)^2]^2}\, \psi_1(\xi)\, d\xi\,. \end{aligned}\right\} \tag{16a}$$

Wird die Halbebene durch eine Momentverteilung belastet, so ist bekanntlich

$$\psi_1(\xi) = -\frac{d^2 M(\xi)}{d\xi^2}\,.$$

Damit wird, wie durch partielle Integration einfach gezeigt werden kann,

$$\varphi_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi\,,$$

woraus sich nach (15) und (8) die Spannungen ergeben.

[1] *L. Föppl*, *Drang* und *Zwang*, Bd. 3, S. 26. München 1948.

Ein unendlich langer Streifen von der Höhe 2δ werde durch Normalkräfte belastet. Die Randbedingungen (Abb. 2) hierfür sind

$$y = \quad \delta : \sigma_y = \psi_1(x), \quad \tau = 0, \tag{18}$$

$$y = -\delta : \sigma_y = \psi_3(x), \quad \tau = 0. \tag{19}$$

Transformiert man (18) und (19) in den Unterbereich, so erhält man mit

$$\varphi_1 - \varphi_3 = -\frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_1(\xi) - \psi_3(\xi))\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi,$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 = -\frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_1(\xi) + \psi_3(\xi))\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi,$$

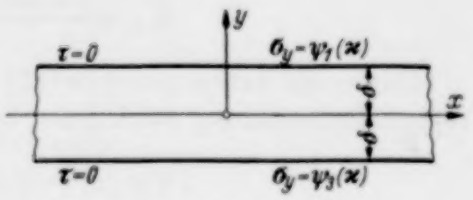


Abb. 2. Streifen mit Normalbelastung.

die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} a_1(\lambda) &= (\varphi_1 - \varphi_3)\,\frac{\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta + \lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta},\\ a_2(\lambda) &= (\varphi_1 + \varphi_3)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta + \lambda\delta\,\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta},\\ a_3(\lambda) &= -(\varphi_1 + \varphi_3)\,\frac{\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta},\\ a_4(\lambda) &= -(\varphi_1 - \varphi_3)\,\frac{\lambda\,\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Geht man mit (21) in (8a) ein, so sind die Verschiebungen und Spannungen[1]

$$\left.\begin{aligned} u = {} & \frac{i}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\varphi_1 - \varphi_3)\,K_3 + (\varphi_1 + \varphi_3)\,K_4]\,\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda\\ & - \frac{i}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(\varphi_1 - \varphi_3)\,\frac{\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta} + (\varphi_1 + \varphi_3)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Coj}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}\right]\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda,\\ v = {} & -\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\varphi_1 - \varphi_3)\,K_5 + (\varphi_1 + \varphi_3)\,K_6]\,\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda\\ & - \frac{1}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(\varphi_1 - \varphi_3)\,\frac{\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Coj}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta} + (\varphi_1 + \varphi_3)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}\right]\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda,\\ \sigma_x = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\varphi_1 - \varphi_3)\,K_1 + (\varphi_1 + \varphi_3)\,K_2]\,\lambda^2 e^{i\lambda x}\,d\lambda,\\ \sigma_y = {} & -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\varphi_1 - \varphi_3)\,K_3 + (\varphi_1 + \varphi_3)\,K_4]\,\lambda^2 e^{i\lambda x}\,d\lambda,\\ \tau = {} & -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(\varphi_1 - \varphi_3)\,K_5 + (\varphi_1 + \varphi_3)\,K_6]\,\lambda^2 e^{i\lambda x}\,d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$K_1 \equiv \frac{(\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta - \mathfrak{Coj}\,\lambda\delta)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y - \lambda y\,\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Coj}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta},$$

$$K_2 \equiv \frac{(\lambda\delta\,\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta - \mathfrak{Sin}\,\lambda\delta)\,\mathfrak{Coj}\,\lambda y - \lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta},$$

[1] *F. Seewald*, Abhandlungen aus dem Aerodynmaischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen S. 11. Berlin 1927.

$$K_3 \equiv \frac{(\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta + \mathfrak{Cof}\,\lambda\delta)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y - \lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta}.$$

$$K_4 \equiv \frac{(\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta + \mathfrak{Sin}\,\lambda\delta)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y - \lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}.$$

$$K_5 \equiv \frac{\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y - \lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta},$$

$$K_6 \equiv \frac{\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y - \lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}.$$

Damit die Integranten in (22) für $\lambda \to 0$ endliche Grenzwerte besitzen, müssen bei der Potenzreihen-Entwicklung nach λ die Koeffizienten von λ^{-n} $(n > 0)$ verschwinden. Dies ergibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_1(\xi) - \psi_3(\xi))\,d\xi = 0\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_1(\xi) - \psi_3(\xi)\,\xi\,d\xi = 0\,, \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_1(\xi) - \psi_3(\xi))\,\xi^2\,d\xi = 0\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_1(\xi) - \psi_3(\xi))\,\xi^3\,d\xi = 0\,. \tag{24}$$

Die Integrale (23) sind die bekannten statischen Gleichgewichtsbedingungen. Werden die Gleichungen (23) und (24) durch die Belastung erfüllt, so konvergieren die Integrale (22) gleichmäßig in x und y, so daß durch (22) die Lösung des Randwertproblems gegeben ist.

4. Der unendlich lange Streifen mit Tangentialbelastung. Wirken auf den Rändern $y = \pm\delta$ eines unendlich langen Streifens tangential angreifende Kräfte, so lauten die Randbedingungen (Abb. 3)

$$y = \quad \delta : \sigma_y = 0\,, \qquad \tau = \psi_2(x)\,, \tag{25}$$

$$y = -\delta : \sigma_y = 0\,, \qquad \tau = \psi_4(x)\,. \tag{26}$$

Damit erhält man in entsprechender Weise wie in Ziff. 3 die Spannungsfunktion. Setzt man

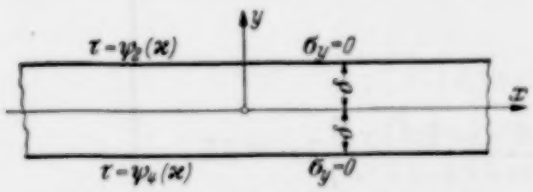


Abb. 3. Streifen mit Tangentialbelastung.

$$\varphi_2 + \varphi_4 = -\frac{i}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} [\psi_2(\xi) + \psi_4(\xi)]\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\,,$$

$$\varphi_2 - \varphi_4 = -\frac{i}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} [\psi_2(\xi) - \psi_4(\xi)]\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\,,$$

so werden die Verschiebungen und Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{i}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty} [(\varphi_2 + \varphi_4)\,L_3 + (\varphi_2 - \varphi_4)\,L_4]\,\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda \\
&\quad - \frac{i}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\varphi_2 + \varphi_4)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta} + (\varphi_2 - \varphi_4)\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}\right] e^{i\lambda x}\,d\lambda\,, \\
v &= -\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty} [(\varphi_2 + \varphi_4)\,L_5 + (\varphi_2 - \varphi_4)\,L_6]\,e^{i\lambda x}\,d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\varphi_2 + \varphi_4)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta} + (\varphi_2 - \varphi_4)\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}\right] e^{i\lambda x}\,d\lambda\,, \\
\sigma_x &= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [(\varphi_2 + \varphi_4)\,L_1 + (\varphi_2 - \varphi_4)\,L_2]\,\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda\,, \\
\sigma_y &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [(\varphi_2 + \varphi_4)\;L_3 + (\varphi_2 - \varphi_4)\,L_4]\,\lambda^2 e^{i\lambda x}\,d\lambda\,, \\
\tau &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [(\varphi_2 + \varphi_4)\,L_5 + (\varphi_2 - \varphi_4)\,L_6]\,\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda\,.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Hierbei sind die Abkürzungen verwendet

$$L_1 = \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + \lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y - \lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta},$$

$$L_2 = \frac{2\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + \lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y - \lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta},$$

$$L_3 = \frac{y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y - \delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta},$$

$$L_4 = \frac{y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y - \delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta},$$

$$L_5 = \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + \lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y - \lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta},$$

$$L_6 = \frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + \lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y - \lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}.$$

Endliche Grenzwerte der Integranden in (27) für $\lambda \to 0$ erhält man (vgl. Ziff. 3), wenn die Belastung den Bedingungen genügt

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi_2(\xi) + \psi_4(\xi)]\,d\xi &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi_2(\xi) + \psi_4(\xi)]\,\xi\,d\xi &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi_2(\xi) + \psi_4(\xi)]\,\xi^2\,d\xi &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Abb. 4. Streifen mit Einzellast im Innern.

Die Integrale (27) sind damit gleichmäßig in x und y konvergent, so daß durch (27) die Lösung des Randwertproblems gegeben ist.

Für die durch tangentiale am Rand $y = 0$ beanspruchte Halbscheibe wird die Lösung ganz entsprechend wie in Ziff 3 durchgeführt. Daher unterdrücken wir die Rechnung im einzelnen.

Sind an einem unendlich langen Streifen allgemeine Belastungen auf den Rändern $y = +\delta$ und $y = -\delta$ vorgegeben, so lassen sich mit der hier beschriebenen Methode die Spannungen und Formänderungen angeben. An einem speziellen Beispiel soll in Ziff. 5 der Rechnungsgang gezeigt werden.

5. Der unendlich lange Streifen mit einer Einzellast im Innern. Ein unendlich langer Streifen werde durch eine Einzellast im Innern beansprucht und liege auf dem Rand $y = \delta$ in zwei Punkten auf (Abb. 4). Mit den in Ziff. 3 und 4 angegebenen Gleichungen lassen sich für diesen Belastungsfall die Spannungen angeben.

Für eine Einzelkraft zunächst, die im Koordinatenursprung der vollen Scheibe angreift, wird mit Abb. 5 die Spannungsfunktion[1]

$$F = -\frac{1+m}{4}\frac{P}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha x - \frac{1-m}{1+m}\right)e^{-\alpha x}\sin\alpha y\,d\alpha. \quad (29)$$

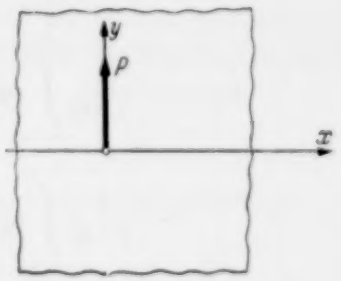


Abb. 5. Scheibe mit Einzellast.

Aus (29) erhält man die zugehörigen Spannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \frac{P}{4\pi}\left[(1+m)\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2} - (1-m)\frac{y}{x^2+y^2}\right], \\ \sigma_{y_1} &= \frac{P}{4\pi}\left[-(1+m)\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2} + (3+m)\frac{y}{x^2+y^2}\right], \\ \tau_1 &= \frac{P}{4\pi}\left[(1+m)\frac{2y^2x}{(x^2+y^2)^2} + (1-m)\frac{x}{x^2+y^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Auf den Rändern $y = +\delta$ und $y = -\delta$ wirkt demnach zunächst

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{y=\delta} &= -\sigma_{y=-\delta} = \frac{P}{4\pi}\left[-(1+m)\frac{2\delta x^2}{(x^2+\delta^2)^2} + (3+m)\frac{\delta}{x^2+\delta^2}\right], \\ \tau_{y=\delta} &= \tau_{y=-\delta} = \frac{P}{4\pi}\left[(1+m)\frac{2\delta^2 x}{(x^2+\delta^2)^2} + (1-m)\frac{x}{x^2+\delta^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (30a)$$

[1] *K. Girkmann*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 415.

Mit (30a) wird dann, damit die Spannungen auf den Rändern verschwinden,

$$\left.\begin{aligned} q_1 - q_3 &= \frac{P}{2\pi\lambda^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-(1+m)\frac{2\delta x^2}{(x^2+\delta^2)^2}+(3+m)\frac{\delta}{x^2+\delta^2}\right]e^{-i\lambda x}\,dx\,,\\ q_1 + q_3 &= 0\\ q_2 + q_4 &= \frac{Pi}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(1+m)\frac{2\delta^2 x}{(x^2+\delta^2)^2}+(1-m)\frac{x}{x^2+\delta^2}\right]e^{-i\lambda x}\,dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Um die Integrale (31) auszuwerten, setzt man

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^\nu e^{-i\lambda x}}{(x^2+\delta^2)^\mu} = J_{\nu+\mu} \qquad \begin{matrix}(\nu,\,\mu\ \text{ganz})\\ (0\leqq\nu\leqq 2)\\ (1\leqq\mu\leqq 2)\,.\end{matrix}$$

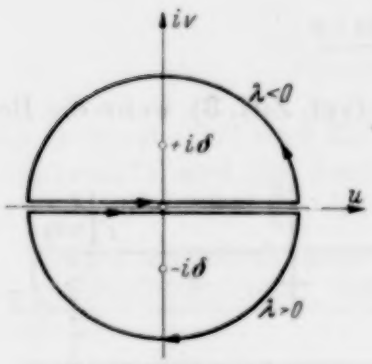


Abb. 6. Integrationsweg zur Auswertung von $J_{\nu+\mu}$

Die Integrale lassen sich mit $x = u + iv$ über die Residuen berechnen. Die Nullstellen der Nenner sind $x_0 = \pm i\delta$, wobei x_0 in J_1 und J_2 ein Pol erster Ordnung, in J_3 und J_4 ein Pol zweiter Ordnung ist. Mit dem durch Abb. 6 gegebenen Integrationsweg für $\lambda \lessgtr 0$ ergibt sich

$$J_1 = -\pi\frac{e^{-|\lambda|\delta}}{\delta}\,,\qquad J_2 = i\frac{\lambda}{|\lambda|}\pi e^{-|\lambda|\delta}\,,$$

$$J_3 = -\frac{i\pi}{2\delta}\lambda e^{-|\lambda|\delta}\,,\qquad J_4 = -\frac{\pi}{2\delta}\frac{\lambda}{|\lambda|}(1-\delta|\lambda|)e^{-|\lambda|\delta}\,.$$

Diese Ausdrücke setzt man in (31) ein und erhält

$$\left.\begin{aligned} (q_1 - q_3) &= \frac{P}{2\lambda^2}\left[+(1+m)(1-\delta|\lambda|)e^{-|\lambda|\delta}-(3+m)e^{-|\lambda|\delta}\right],\\ (q_2 + q_4) &= -\frac{P}{2\lambda}\left[-(1+m)\lambda\delta e^{-|\lambda|\delta}+(1-m)e^{-|\lambda|\delta}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{31a}$$

Mit (31a) geht man in (22) und (27) ein und bekommt die Verschiebungen und Spannungen

$$\left.\begin{aligned} u_2 = {} & \frac{i}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1-q_3)\,K_3\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda - \frac{i}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1-q_3)\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta-2\lambda\delta}\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda\\ & -\frac{i}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}q_2+q_4)\,L_3 e^{i\lambda x}\,d\lambda - \frac{i}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_2+q_4)\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta-2\lambda\delta}\,e^{i\lambda x}\,d\lambda\,,\\ v_2 = {} & -\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1-q_3)\,K_5\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda - \frac{1}{E\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1-q_3)\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta-2\lambda\delta}\lambda e^{i\lambda x}\,d\lambda,\\ & -\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_2+q_4)\,L_5 e^{i\lambda x}\,d\lambda + \frac{1}{E\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_2+q_4)\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta-2\lambda\delta}\,e^{i\lambda x}\,d\lambda\,,\\ \sigma_{x_2} = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(q_1-q_3)\,K_1\lambda^2+(q_2+q_4)\,L_1\lambda]\,e^{i\lambda x}\,d\lambda\,,\\ \sigma_{y_2} = {} & -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(q_1-q_3)\,\lambda^2 K_3+(q_2+q_4)\,\lambda^2 L_3]\,e^{i\lambda x}\,d\lambda\,,\\ \tau_2 = {} & -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(q_1-q_3)\lambda^2 K_5+(q_2+q_4)\,\lambda\,L_5]\,e^{i\lambda x}\,d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Auf dem Rand $y = \delta$ greifen noch die Auflagekräfte an. Die Unterfunktion für eine Einzellast (vgl. Abb. 7) ist

$$\bar{\varphi}_{1A} = -\frac{1}{\lambda^2} \lim p_0 \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-i\lambda\xi}\, d\xi = -\frac{1}{\lambda^2} P e^{-i\lambda a}. \tag{33}$$

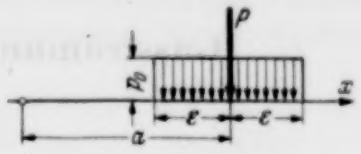


Abb. 7. Zur Berechnung der Unterfunktion für eine Einzellast.

Aus (33) erhält man durch Grenzübergang für ein an der Stelle $x = a$ angreifendes Moment

$$\bar{\varphi}_{1M} = -\frac{i}{\lambda} M_A e^{-i\lambda a}. \tag{34}$$

Geht man mit (33) und (34) in (22) ein, so sind die Verschiebungen und Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
u_3 &= \frac{i}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{\varphi}_1 K_3 + \bar{\varphi}_1 K_4]\lambda e^{i\lambda x} d\lambda - \frac{i}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 \left[\frac{\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta\ \mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta} + \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Coj}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}\right] \\
&\qquad \times \lambda e^{i\lambda x} d\lambda, \\
v_3 &= -\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 (K_5 + K_6)\lambda\, e^{i\lambda x} d\lambda - \frac{1}{E\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 \left[\frac{\mathfrak{Coj}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Coj}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta} + \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\ \mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}\right] \\
&\qquad \times \lambda e^{i\lambda x} d\lambda, \\
\sigma_{x3} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 (K_1 + K_2)\lambda^2 e^{i\lambda x} d\lambda, \\
\sigma_{y3} &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 (K_3 + K_4)\lambda^2 e^{i\lambda x} d\lambda, \\
\tau_3 &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 (K_5 + K_6)\lambda^2 e^{i\lambda x} d\lambda,
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

wobei

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{A}{\lambda^2}(e^{-i\lambda a} + e^{i\lambda a}) + \frac{i}{\lambda} M_A (e^{-i\lambda a} - e^{i\lambda a})$$

ist. Damit ergeben sich die Spannungen

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} + \sigma_{x_3},\ \sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} + \sigma_{y_3},\ \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Um die unbekannten Auflagekräfte und Einspannmomente zu ermitteln, geht man von $\bar{u} = u_2 + u_3$ und $\bar{v} = v_2 + v_3$ aus. Die Auflagekräfte und Einspannmomente erhält man aus der Bedingung, daß die Integranden in u und v endliche Grenzwerte für $\lambda \to 0$ haben müssen. Es ergeben sich vier lineare Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Auflagekräfte und Einspannmomente.

(Eingegangen am 16. Dezember 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hans Jung*, Stuttgart-N, Technische Hochschule, Keplerstr. 10

Mit (30a) wird dann, damit die Spannungen auf den Rändern verschwinden,

$$\left.\begin{aligned} q_1 - q_3 &= \frac{P}{2\pi\lambda^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-(1+m)\frac{2\delta x^2}{(x^2+\delta^2)^2}+(3+m)\frac{\delta}{x^2+\delta^2}\right]e^{-i\lambda x}\,dx\,,\\ q_1 + q_3 &= 0\\ q_2 + q_4 &= \frac{Pi}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(1+m)\frac{2\delta^2 x}{(x^2+\delta^2)^2}+(1-m)\frac{x}{x^2+\delta^2}\right]e^{-i\lambda x}\,dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Um die Integrale (31) auszuwerten, setzt man

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^\nu e^{-i\lambda x}}{(x^2+\delta^2)^\mu} = J_{\nu+\mu} \qquad \begin{matrix}(\nu,\mu\ \text{ganz})\\ (0\leqq\nu\leqq 2)\\ (1\leqq\mu\leqq 2)\,.\end{matrix}$$

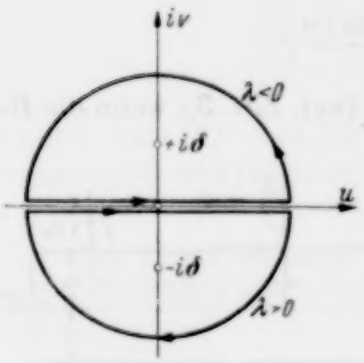


Abb. 6. Integrationsweg zur Auswertung von $J_{\nu+\mu}$

Die Integrale lassen sich mit $x = u + iv$ über die Residuen berechnen. Die Nullstellen der Nenner sind $x_0 = \pm i\delta$, wobei x_0 in J_1 und J_2 ein Pol erster Ordnung, in J_3 und J_4 ein Pol zweiter Ordnung ist. Mit dem durch Abb. 6 gegebenen Integrationsweg für $\lambda \lessgtr 0$ ergibt sich

$$J_1 = -\pi\frac{e^{-|\lambda|\delta}}{\delta}\,,\qquad J_2 = i\frac{\lambda}{|\lambda|}\pi e^{-|\lambda|\delta}\,,$$

$$J_3 = -\frac{i\pi}{2\delta}\lambda e^{-|\lambda|\delta}\,,\qquad J_4 = -\frac{\pi}{2\delta}\frac{\lambda}{|\lambda|}(1-\delta|\lambda|)e^{-|\lambda|\delta}\,.$$

Diese Ausdrücke setzt man in (31) ein und erhält

$$\left.\begin{aligned} (q_1 - q_3) &= \frac{P}{2\lambda^2}\left[+(1+m)(1-\delta|\lambda|)e^{-|\lambda|\delta}-(3+m)e^{-|\lambda|\delta}\right],\\ (q_2 + q_4) &= -\frac{P}{2\lambda}\left[-(1+m)\lambda\delta e^{-|\lambda|\delta}+(1-m)e^{-|\lambda|\delta}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{31a}$$

Mit (31a) geht man in (22) und (27) ein und bekommt die Verschiebungen und Spannungen

$$\left.\begin{aligned} u_2 = &-\frac{i}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1-q_3)K_3\lambda e^{i\lambda x}d\lambda - \frac{i}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1-q_3)\frac{\operatorname{Coj}\lambda\delta\operatorname{Sin}\lambda y}{\operatorname{Sin}2\lambda\delta-2\lambda\delta}\lambda e^{i\lambda x}d\lambda\\ &-\frac{i}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}q_2+q_4)L_3 e^{i\lambda x}d\lambda - \frac{i}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_2+q_4)\frac{\operatorname{Sin}\lambda\delta\operatorname{Sin}\lambda y}{\operatorname{Sin}2\lambda\delta-2\lambda\delta}e^{i\lambda x}d\lambda\,,\\ v_2 = &-\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1-q_3)K_5\lambda e^{i\lambda x}d\lambda - \frac{1}{E\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1-q_3)\frac{\operatorname{Coj}\lambda\delta\operatorname{Coj}\lambda y}{\operatorname{Sin}2\lambda\delta-2\lambda\delta}\lambda e^{i\lambda x}d\lambda,\\ &-\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_2+q_4)L_5 e^{i\lambda x}d\lambda + \frac{1}{E\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_2+q_4)\frac{\operatorname{Sin}\lambda\delta\operatorname{Coj}\lambda y}{\operatorname{Sin}2\lambda\delta-2\lambda\delta}e^{i\lambda x}d\lambda\,,\\ \sigma_{x_2} = &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(q_1-q_3)K_1\lambda^2+(q_2+q_4)L_1\lambda]e^{i\lambda x}d\lambda\,,\\ \sigma_{y_2} = &-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(q_1-q_3)\lambda^2 K_3+(q_2+q_4)\lambda^2 L_3]e^{i\lambda x}d\lambda\,,\\ \tau_2 = &-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(q_1-q_3)\lambda^2 K_5+(q_2+q_4)\lambda L_5]e^{i\lambda x}d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Auf dem Rand $y = \delta$ greifen noch die Auflagekräfte an. Die Unterfunktion für eine Einzellast (vgl. Abb. 7) ist

$$\bar{\varphi}_{1A} = -\frac{1}{\lambda^2} \lim p_0 \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-i\lambda\xi}\, d\xi = -\frac{1}{\lambda^2} P e^{-i\lambda a}. \tag{33}$$

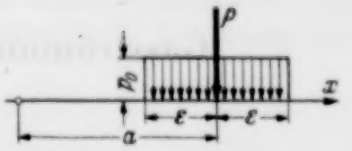


Abb. 7. Zur Berechnung der Unterfunktion für eine Einzellast.

Aus (33) erhält man durch Grenzübergang für ein an der Stelle $x = a$ angreifendes Moment

$$\bar{\varphi}_{1M} = -\frac{i}{\lambda} M_A e^{-i\lambda a}. \tag{34}$$

Geht man mit (33) und (34) in (22) ein, so sind die Verschiebungen und Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
u_3 &= \frac{i}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{\varphi}_1 K_3 + \bar{\varphi}_1 K_4]\,\lambda e^{i\lambda x} d\lambda - \frac{i}{\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 \left[\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\ \mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta} + \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}\right] \\
&\qquad \times \lambda e^{i\lambda x} d\lambda, \\
v_3 &= -\frac{1}{4\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 (K_5 + K_6)\,\lambda\, e^{i\lambda x}\, d\lambda - \frac{1}{E\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 \left[\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda\delta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta - 2\lambda\delta} + \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\delta\ \mathfrak{Sin}\,\lambda y}{\mathfrak{Sin}\,2\lambda\delta + 2\lambda\delta}\right] \\
&\qquad \times \lambda e^{i\lambda x} d\lambda, \\
\sigma_{x3} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 (K_1 + K_2)\,\lambda^2 e^{i\lambda x}\, d\lambda, \\
\sigma_{y3} &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 (K_3 + K_4)\lambda^2 e^{i\lambda x}\, d\lambda, \\
\tau_3 &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1 (K_5 + K_6)\lambda^2 e^{i\lambda x}\, d\lambda,
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

wobei

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{A}{\lambda^2}(e^{-i\lambda a} + e^{i\lambda a}) + \frac{i}{\lambda} M_A (e^{-i\lambda a} - e^{i\lambda a})$$

ist. Damit ergeben sich die Spannungen

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} + \sigma_{x_3},\ \sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} + \sigma_{y_3},\ \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Um die unbekannten Auflagekräfte und Einspannmomente zu ermitteln, geht man von $\bar{u} = u_2 + u_3$ und $\bar{v} = v_2 + v_3$ aus. Die Auflagekräfte und Einspannmomente erhält man aus der Bedingung, daß die Integranden in u und v endliche Grenzwerte für $\lambda \to 0$ haben müssen. Es ergeben sich vier lineare Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Auflagekräfte und Einspannmomente.

(Eingegangen am 16. Dezember 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hans Jung*, Stuttgart-N, Technische Hochschule, Keplerstr. 10

Gasströmung konstanten Querschnitts mit Wärmezufuhr.

Von O. Schrenk.

1. Anschauliche Überlegungen. Die Gasströmung konstanten Querschnitts mit Wärmezufuhr wurde neuerdings mehrfach theoretisch betrachtet[1]. Die dabei gefundenen Ergebnisse standen teilweise in einem scheinbaren oder wirklichen Widerspruch miteinander.

Es ist indessen nicht schwer, das Problem auf anschaulich physikalischem Wege zu überblicken, und auch einige Ergebnisse ohne Formeln abzuleiten.

Die nachstehenden Überlegungen zu dieser Frage[2] nehmen gewisse Analogien der Strömung in einer Heizkammer mit der in einer Lavaldüse zu Hilfe.

Im Unterschallbereich der Lavaldüse nehmen Geschwindigkeit und *Mach*sche Zahl zu, Druck, Temperatur und Dichte aber (adiabatisch) ab, wenn der Strömungsquerschnitt sich verengt. Die Energie der Masseneinheit bleibt dabei konstant.

Will man nun in einer durchströmten Kammer konstanten Querschnitts die Geschwindigkeit anwachsen lassen, so muß man hier das Gas durch Wärmezufuhr ausdehnen.

Die Temperatur T wächst dabei, im Gegensatz zum Fall der *Laval*düse, im allgemeinen in Strömungsrichtung an, abgesehen von einem noch zu erörternden Ausnahmegebiet. Der Druck p dagegen nimmt nach dem Impulssatz in Strömungsrichtung ebenfalls ab.

Die *Mach*sche Zahl

$$M = \frac{w}{c} = \frac{w}{\sqrt{\varkappa g R T}}$$

(w Strömungsgeschwindigkeit, c Schallgeschwindigkeit, $\varkappa$ Verhältnis der spezif. Wärmen c_p/c_v, g Erdbeschleunigung, R Gaskonstante) wächst in der geheizten Parallelströmung stets an, gleichviel ob dabei die Temperatur zu- oder abnimmt, da die Zunahme von w stets überwiegt. Diese an sich plausible Tatsache läßt sich mit Hilfe der analytischen Beziehungen leicht bestätigen.

Vom Temperatureinfluß abgesehen, besteht also eine Analogie zwischen der *Laval*düse und der zylindrischen Brennkammer; allerdings ist in dieser die Zustandsänderung nicht adiabatisch.

Der auf den Temperaturverlauf zurückgehende Unterschied besteht im wesentlichen darin, daß die Schallgeschwindigkeit mit der Temperatur steigt, so daß gleiche *Mach*sche Zahlen in der Heizkammer bei höheren Geschwindigkeiten erreicht werden als in der *Laval*düse, wenn man von gleichen Eintrittsbedingungen ausgeht.

Die Analogie besteht auch hinsichtlich des besonderen Verhaltens der Strömung im Schallquerschnitt.

Die *Laval*düse ist für $M = 1$ auf einer kurzen Wegstrecke zylindrisch wie die Heizkammer. Da nun die Lavaldüse keine Energiezufuhr besitzt, muß und darf auch der zylindrischen Heizkammer bei $M = 1$ keine Energie zugeführt werden.

Weiter sieht man entsprechend dem Bisherigen, daß eine Steigerung der Geschwindigkeit über die Schallgeschwindigkeit hinaus Wärmeabfuhr erfordert. Die Heizkammerströmung besitzt also bei $M = 1$ ein Energiemaximum.

Auch die erreichbare Höchsttemperatur besitzt einen Höchstwert. Dieser befindet sich aber bereits im Unterschallbereich, da bei kleinen *Mach*schen Zahlen die Temperatur auf jeden Fall mit der zugeführten Energie zunimmt und andererseits nach dem Vorausgegangenen bei $M = 1$ ein negativer Temperaturgradient herrscht wie bei der *Laval*düse.

Daß bei $M = 1$ die zugeführte Energie ein Maximum besitzt, scheint auf den ersten Blick überraschend, da man ja auch bei Überschallgeschwindigkeit weiteren Kraftstoff verbrennen kann. Und man kann auch, beispielsweise mit einem stromaufwärts befindlichen Kompressor von genügender Leistung, eine beliebige große Fördermenge durch die Heizkammer pressen.

Auch in dieser Frage schafft die Analogie mit einer in eine zylindrische Rohrleitung eingesetzten Düse Klarheit. Solange diese Düse nur einen konvergenten Teil besitzt, kann man in deren engstem Querschnitt ohne Rücksicht auf die Leistung des Kompressors nie die Schallgeschwin-

[1] Schrifttum siehe *J. V. Foa* und *G. Rudinger*, J. Aer. Sci. 16 (1949), S. 84 und S. 566.

[2] Erstmals vorgetragen im Juli 1949 in St. Louis im Elsaß.

digkeit überschreiten. Die Wirkung einer Leistungssteigerung des Kompressors besteht nur darin, daß die Luft vor dem Eintritt in die Düse komprimiert wird. Durch diese Kompression wird zwar die geförderte Masse erhöht, wie erwartet, aber das Niveau der Geschwindigkeiten und *Mach*schen Zahlen vor und in der Düse in dem erforderlichen Maße herabgesetzt. Man kann dies als den „Sperr- oder Drosseleffekt" einer Düse bezeichnen.

Der gleiche Sperreffekt tritt auch vor und in der Heizkammer auf, da auch hier nach dem Impulssatz, wie bereits gezeigt, ein Druckgefälle zwischen Ein- und Austritt herrscht.

So sorgt der Strömungsmechanismus selbst automatisch dafür, daß die Schallgeschwindigkeit in einer Heizkammer ohne Wärmeabfuhr nicht überschritten wird.

2. Rechnerische Zusammenhänge. Bei der analytischen Durchrechnung komplizierterer Strömungsanordnungen, die eine Heizkammer als Element enthalten, kommt man ohne besondere Vorsichtsmaßnahmen ebenfalls ganz von selbst nur auf solche Lösungen, die mit dieser Grenze vereinbar sind, wenn man die im folgenden zusammengestellten Grundgleichungen (1) bis (4) oder eine entsprechende Anzahl von daraus abgeleiteten Gleichungen [z. B. (5) bis (9)] einführt und die Größen des Gas- und Strömungszustands an ihrem Eintritt und Austritt als Unbekannte behandelt. Zu diesen Gleichungen treten dann weitere hinzu, die den übrigen Elementen der Gesamtanordnung und den Randbedingungen des Problems entsprechen.

Um Aussagen über die Brennkammer selbst zu machen, ist es aber nicht nötig diese übrigen Gleichungen des Gesamtsystems heranzuziehen oder gar vom Strömungszustand ohne Heizung auszugehen[1].

Die nachstehende analytische Rechnung kann sich daher auf die eigentliche Brennkammer beschränken.

Sie dient zur Bestätigung und quantitativen Festlegung dessen, was im Vorausgegangenen schon auf Grund anschaulicher Überlegungen gefunden worden ist.

Der Zeiger 1 bedeutet im folgenden den Eintrittsquerschnitt der Brennkammer; die Größen ohne Zeiger gehören zu einem beliebigen Schnitt innerhalb oder am Austritt der Kammer. Die Wandreibung ist vernachlässigt. Die Energiezufuhr ist stetig und in strömungssenkrechten Schnitten konstant angenommen.

Man hat dann, wenn noch ϱ die Gasdichte bezeichnet, die bekannten Grundgleichungen

$$\varrho w = \varrho_1 w_1 \text{ (Kontinuität)}, \tag{1}$$

$$\frac{p}{\varrho T} = \frac{p_1}{\varrho_1 T_1} \text{ (Gasgleichung)}, \tag{2}$$

$$p + \varrho w^2 = p_1 + \varrho_1^2 \text{ (Impulssalz)}. \tag{3}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{g\, c_{pm}}{A}(T - T_1) + \frac{w^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}. \tag{4}$$

In der letzten Gleichung ist q die der Masseneinheit vom Eintrittsquerschnitt ab zugeführte Wärmeenergie in $\left[\frac{\text{kcal} \cdot m}{\text{kg sek}^2}\right]$, A das mechanische Wärmeäquivalent, c_{pm} die im voraus leicht abzuschätzende spezifische Wärme zwischen T und T_1, die etwas größer als c_{p1} ist.

Wenn man das Aufheizungsverhältnis

$$\tau = \frac{T}{T_1}$$

und das Entspannungsverhältnis

$$\psi = \frac{p}{p_1} (< 1)$$

einführt, erhält man aus (1) bis (3) eine Reihe von Beziehungen, die man als Funktionen der vier Veränderlichen

$$\tau,\ \psi,\ M_1 \text{ und } M$$

ausdrücken kann, wobei jeweils zwei dieser Veränderlichen die beiden anderen bestimmen.

Zunächst findet man aus (3) allein einen anderen, oft nützlichen Ausdruck für den Impulssatz, wenn man

$$\varkappa \frac{p}{\varrho} = c^2$$

[1] *Foa* und *Rudinger*, die diesen Weg gehen, sind übrigens in einigen Anwendungsbeispielen zu zahlenmäßig identischen Ergebnissen gelangt wie der Verfasser.

einführt, nämlich

$$\psi = \frac{1 + \varkappa_1 M_1^2}{1 + \varkappa M^2} . \tag{5}$$

Weiter ergibt sich aus (1) bis (3)

$$\tau = \frac{\varkappa M^2}{\varkappa_1 M_1^2} \frac{(1 + \varkappa_1 M_1^2)^2}{(1 + \varkappa M^2)^2} , \tag{6}$$

$$\varkappa_1 M_1^2 = \frac{(1 - \psi)\psi}{\tau - \psi} , \tag{7}$$

$$\varkappa M^2 = \frac{(1 - \psi)\tau}{(\tau - \psi)\psi} . \tag{8}$$

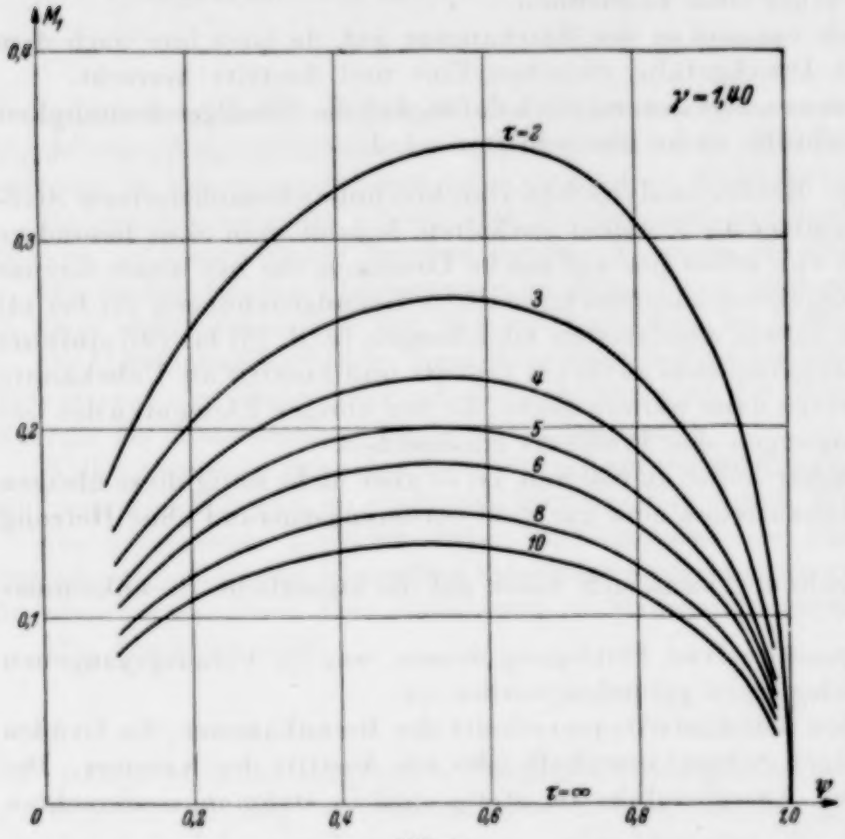


Abb. 1.

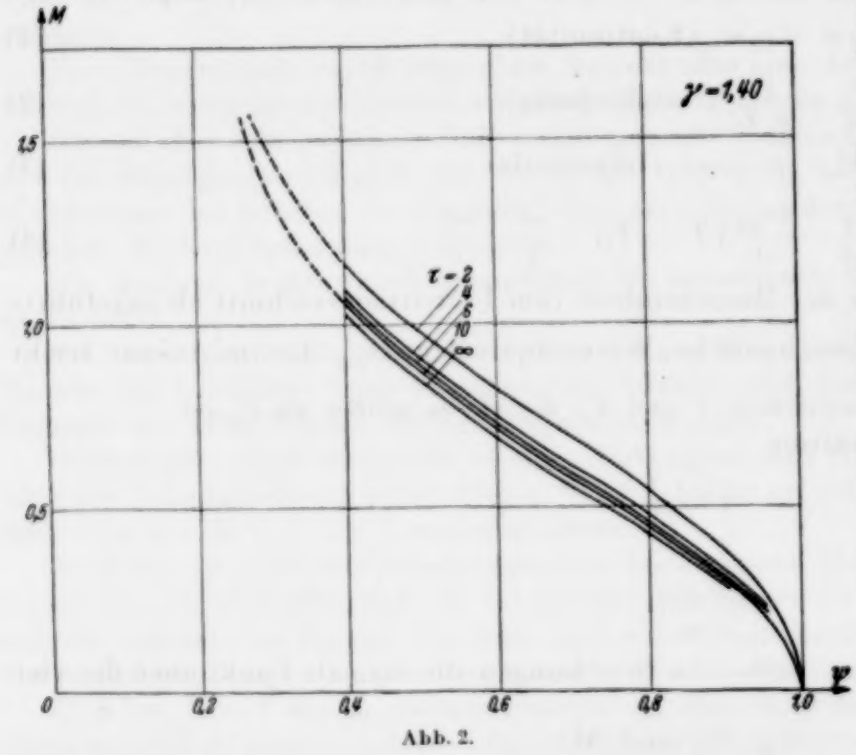


Abb. 2.

Ferner gewinnt man aus (1) und (2) unmittelbar die einfache Beziehung

$$\frac{w}{w_1} = \frac{\tau}{\psi} . \tag{9}$$

Die Gleichungen (5) bis (9) lassen sich für die Anwendung noch in verschiedener Weise umformen und kombinieren.

In Abb. 1 ist M_1 nach (7) für $\varkappa_1 = 1{,}40$ abhängig von ψ und τ dargestellt. Man sieht hier die „Sperrwirkung" der geheizten Kammer: ψ [1] ist bei gleichem M_1, und ebenso M_1 bei gleichem ψ, um so kleiner je größer τ ist. Auch der bereits physikalisch erörterte Höchstwert der Aufheizung für ein gegebenes M_1 erscheint in dieser Abbildung (Scheitelpunkte der Kurven), und zwar ist er um so kleiner, je größer M_1 ist.

Daß diese Höchsttemperatur bei einer lokalen *Mach*schen Zahl $M < 1$ liegt, bestätigt die Abb. 2, in der M abhängig von ψ und τ dargestellt ist.

Diese Abbildung zeigt außerdem, daß die kleinen Werte von ψ nur erreicht werden, wenn man $M > 1$ zuläßt, das heißt, wie schon physikalisch gezeigt wurde, mit Wärmeabfuhr. Ob Wärme zu- oder abgeführt werden muß, darüber kann allerdings diese Abbildung ebensowenig aussagen wie die Gleichungen (5) bis (9), da die Energiegleichung dabei nicht benutzt wurde.

Für das unterhalb $M = 1$ liegende Temperaturmaximum gibt die Rechnung, wie bekannt, die nachstehenden, durch einen Querstrich gekennzeichneten Werte:

$$\overline{M} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \; (= 0{,}845 \text{ für } \bar{\varkappa} = 1{,}40)$$

($\overline{M}$ ist unabhängig vom Zustand im Eintrittsquerschnitt),

$$\overline{\psi} = \frac{1 + \varkappa_1 M_1^2}{2} ,$$

[1] Unter Beschränkung auf den rechten Ast der Kurven, s. die folgenden Ausführungen.

$$\bar{\psi} = \sqrt{\bar{\tau}}\left(\sqrt{\bar{\tau}} - \sqrt{\bar{\tau} - 1}\right)$$

und

$$\bar{\tau} = \frac{(1 + \varkappa_1 M_1^2)^2}{4\,\varkappa_1 M_1^2}.$$

Für die Schallgrenze (Zeiger *) mit

$$M^* = 1$$

erhält man in entsprechender Weise

$$\psi^* = \frac{1 + \varkappa_1 M_1^2}{1 + \varkappa^*},$$

$$\frac{\psi^*}{\bar{\psi}} = \frac{2}{1 + \varkappa^*} (= 0{,}834 \text{ für } \varkappa^* = 1{,}40),$$

$$\frac{\tau^*}{\bar{\tau}} = \frac{4\,\varkappa^*}{(1 + \varkappa^*)^2} (= 0{,}973 \text{ für } \varkappa^* = 1{,}40).$$

Die bisher nicht benutzte Energiegleichung (4) gibt Aussagen über das Energiemaximum und die Verteilung der zugeführten Wärmeenergie auf den rein thermodynamischen Anteil (Wärmeinhalt) und die kinetische Energie. Man kann (4) in der dimensionslosen Form

$$\frac{q}{g\,c_{pm}\,T_1} = (\tau - 1) + \frac{c_{p1}}{c_{pm}}\,\frac{\varkappa_1 - 1}{2}\,M_1^2\left(\frac{\tau^2}{\psi^2} - 1\right)$$

schreiben; diese Funktion ist in Abb. 3 für den Sonderfall $M_1 = 0{,}2$ als Beispiel dargestellt. Man findet hier die zugeführte Gesamtenergie $q/g\,c_{pm}\,T_1$ und den rein thermodynamischen Anteil $\tau - 1$ abhängig von ψ aufgetragen[1]. Der schraffierte Teil zwischen den beiden Kurven bedeutet die kinetische Energie. Außerdem ist M als Funktion von ψ eingetragen. Man sieht, daß jenseits $\bar{\psi}$ und $\bar{M}$ die in kinetische Energie umgewandelte Energie größer ist als die zugeführte, so daß die Gastemperatur hier trotz der Heizung abnimmt.

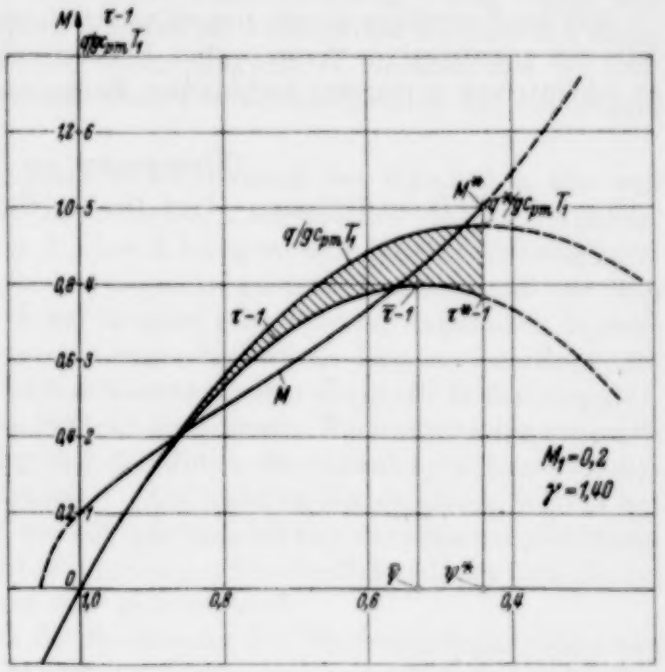


Abb. 3.

Die Darstellung der Abb. 3 läßt sich ohne Schwierigkeit verallgemeinern und von M_1 unabhängig machen, doch ergeben sich dabei keine wesentlichen neuen Gesichtspunkte.

3. Beziehungen zum Verdichtungsstoß. Man kann nunmehr auch eine gewisse Analogie zwischen der Strömung mit Wärmezu- und -abfuhr und der des geraden Verdichtungsstoßes herstellen. Die drei Gleichungen (1) bis (3) gelten in genau gleicher Form auch für den geraden Stoß. Bei diesem tritt nur an die Stelle von (4) die Bedingung $q = 0$. Folglich definieren jeweils zwei Punkte gleicher Energie der Abb. 3, einer rechts und einer links vom Energiemaximum ($M^* = 1$), einen Verdichtungsstoß. Während aber im Falle des Stoßes ($q = 0$) aus Entropiegründen nur die unstetige Verdichtung vom Überschall- auf den Unterschallzustand möglich ist, kann mit Hilfe der unbeschränkten Wärme- und Kältequellen der jetzigen Anordnung eine stetige Zustandsänderung stattfinden.

Nach den bisherigen Betrachtungen kann man sich schließlich auch ohne Schwierigkeit qualitativ darüber Rechenschaft geben, was geschieht, wenn die Gas- und Strömungszustände im umgekehrten Sinne durchlaufen werden.

---

[1] Um die übliche Vorstelluug einer Strömung von links nach rechts zu behalten, ist der Anfangspunkt $\psi = 1$, d. h. der Eintrittsquerschnitt ans linke Ende der Abszissenachse verlegt. Die Abbildung umfaßt die Darstellung aller Heizkammern mit $M_1 = 0{,}2$; bei $\psi = 1$ liegt stets der Eintritt, der Austritt kann bei beliebigem ψ gewählt werden. Der ψ-Maßstab ist gegenüber dem Längenmaßstab der Kammer natürlich in einer nicht genauer bekannten Weise verzerrt.

Im reinen Unterschallbereich bietet sich dabei kein neues Problem: durch Wärmeentzug wird das Gas verdichtet und die Strömung verlangsamt. Theoretisch besteht diese Möglichkeit bis zur Erreichung der Geschwindigkeit null bei $T = 0$. Der Druck erreicht in diesem Grenzfall einen endlichen Maximalwert gleich dem Doppelten des Wertes beim Temperaturmaximum.

Führt man einer Überschallströmung Wärme zu, so muß man zwei Fälle unterscheiden:

Wenn die Wärmezufuhr nicht das durch das Energiemaximum (Abb. 3) gegebene Maß überschreitet, so wird die Strömung verzögert, bleibt aber überkritisch. Eine Rückwirkung der Heizung auf stromaufwärts liegende Bereiche, also eine „Sperrwirkung" wie im Unterschallfall, ist nicht vorhanden.

Führt man aber nach Erreichung der Schallgeschwindigkeit noch mehr Energie zu, dann ist die bisher vorausgesetzte und im Beispiel der Abb. 3 dargestellte Strömungsform nicht mehr existenzfähig. Es wird jetzt ein Verdichtungsstoß auftreten, der im Schallquerschnitt mit der Intensität null beginnt, um bei weiterer Energiezufuhr stromaufwärts in die Heizkammer hineinzuwandern. Man weiß ja, daß eine Verdichtungswelle endlicher Intensität gegen die Überschallströmung stromaufwärts vordringen kann, da ihre Wellengeschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit ist. Die Umwandlung eines Teiles der Überschallströmung in eine Unterschallströmung ermöglicht die Unterbringung größerer zugeführter Energiemengen. Der Stoß wird sich dabei so einstellen, daß der Enddruck der Brennkammer sich der Austritts-Druckbedingung anpaßt.

Auf der Grundlage dieser, nur skizzierten, physikalischen Vorstellung kann man im Bedarfsfalle ein quantitatives theoretisches Rechenverfahren entwickeln. Doch ist diese Aufgabe, wie es scheint, von geringerer technischer Bedeutung.

(Eingegangen am 12. Januar 1950.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *O. Schrenk*, Paris XV, 403 Rue de Vaugirard.

Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen.

Von J. Rotta.

Bei turbulenten Strömungen an freien Wänden und in Rohren oder Kanälen hat sich gezeigt, daß in Wandnähe ein universelles Geschwindigkeitsgesetz gilt, das die Form

$$U = v^* f\left(\frac{v^* y}{\nu}\right) \tag{1}$$

hat, wobei U die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Abstand y von der Wand,

$$v^* = \sqrt{\tau_0/\varrho} \tag{2}$$

die mit der Wandschubspannung τ_0 und der Dichte ϱ gebildete Schubspannungsgeschwindigkeit und ν die kinematische Zähigkeit sind. Dieser universelle Zusammenhang wurde zuerst von *Prandtl*[1] für Rohrstömungen und Grenzschichten an Wänden bei konstantem Außendruck nachgewiesen, wobei die Wände hinreichend glatt waren. Neuerdings ist *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*[2] der experimentelle Nachweis dieses Gesetzes auch für Grenzschichten bei beliebigem Druckgefälle gelungen.

Das Gesetz (1) ist nun aber von der geometrischen Beschaffenheit der Wand, d. h. also von der Wandrauhigkeit abhängig. Insofern ist die Bezeichnung „universelles Geschwindigkeitsgesetz" nicht ganz treffend; sie soll lediglich zum Ausdruck bringen, daß das Geschwindigkeitsgesetz unabhängig von den äußeren Strömungsbedingungen in großem Wandabstand ist. Ein universelles Gesetz in diesem Sinn kann natürlich nur in einer sehr dünnen, wandnahen Schicht bestehen, die einen kleinen Bruchteil der gesamten Grenzschichtdicke bzw. — bei Rohrströmungen — der Rohrabmessungen ausmacht. Was dem Gesetz (1) aber die große Bedeutung gibt, ist die Tatsache, daß sich innerhalb dieser dünnen Schicht die gesamte Wechselwirkung zwischen der von der Zähigkeit erzeugten Schubspannung und der durch die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen bewirkten Schubspannung abspielt. Am äußeren Rande dieser Schicht hat die Turbulenz bereits eine solche Intensität, daß die Zähigkeitsspannung daneben vernachlässigbar ist. Hieraus ergeben sich z. B. wichtige Schlußfolgerungen für die Behandlung turbulenter Grenzschichten, wie in einer anderen Arbeit von mir[3] gezeigt wird.

Für die Darstellung des Gesetzes (1) hat sich die Benutzung des Mischungsweganssatzes von *L. Prandtl*[4] als zweckmäßig erwiesen. Die sich hiermit für glatte und rauhe Wände ergebenden Zusammenhänge sind bekannt. Es läßt sich nun zeigen, daß mit dem Mischungsweganssatz bei physikalisch sinnvoll gewählten Randbedingungen auch der Übergang in die laminare Unterschicht vernünftig erfaßt wird und die Wirkung der Wandrauhigkeit anschaulich erklärt werden kann.

Nimmt man in dem *Prandtl*schen Ansatz für die Schubspannung

$$\tau = \varrho\left(l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| + \nu\right)\frac{dU}{dy} \tag{3}$$

eine Linearbeziehung zwischen dem Mischungsweg l und dem Wandabstand y an und setzt ferner die Schubspannung τ konstant gleich der Wandschubspannung τ_0, was unter den genannten Voraussetzungen für die Gültigkeit des universellen Gesetzes berechtigt ist, so ergibt die Integration der Differentialgleichung (3) eine Näherung für den Geschwindigkeitsverlauf, die durch Messungen als brauchbar bestätigt wird. Innerhalb der laminaren Unterschicht, deren Dicke δ_L sei, ist keine Turbulenz vorhanden, deshalb ist in (3) $l = 0$ zu setzen. Mit $U = 0$ für $y = 0$

---

[1] *L. Prandtl*, Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. S. 18. IV. Lfg. Oldenbourg. München 1932.

[2] *H. Ludwig* und *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 288.

[3] *J. Rotta*, Über die Theorie der turbulenten Grenzschichten. Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut f. Strömungsforschung Nr. 1, Göttingen 1950.

[4] *L. Prandtl*, Führer durch die Strömungslehre, 3. Aufl. Braunschweig 1949.

folgt somit für

$$y \leq \delta_L : \; U = \frac{\tau_0}{\varrho \nu} y = \frac{v^{*2} y}{\nu}. \tag{4a}$$

Für den anschließenden, turbulenten Teil kann man

$$l = \varkappa (y - \delta_L) \tag{5}$$

setzen[1], wobei $\varkappa$ als eine universelle Konstante angesehen wird, die etwa die Größe $\varkappa \sim 0{,}4$ hat. Der Anschluß an (4a) für $y = \delta_L$ wird durch die Bedingung

$$U_{\delta_L} = \frac{v^{*2} \delta_L}{\nu}$$

gesichert. Die Integration von (3) liefert, wenn man l für y mit Hilfe von (5) substituiert, für

$$y \geq \delta_L : U = v^* \left\{ \frac{\nu}{\varkappa v^* l} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{v^* l}{\nu}\right)^2 + 1/4} \right] + \frac{1}{\varkappa} \ln \left[2 \frac{v^* l}{\nu} + 2 \sqrt{\left(\frac{v^* l}{\nu}\right)^2 + 1/4} \right] + \frac{v^* \delta_L}{\nu} \right\}. \tag{4b}$$

Abb. 1 zeigt (4a) und (4b) für $v^* \delta_L / \nu = 6{,}7$ und $\varkappa = 0{,}4$ im Vergleich mit Messungen von *H. Reichardt*[2] an als hydrodynamisch glatt

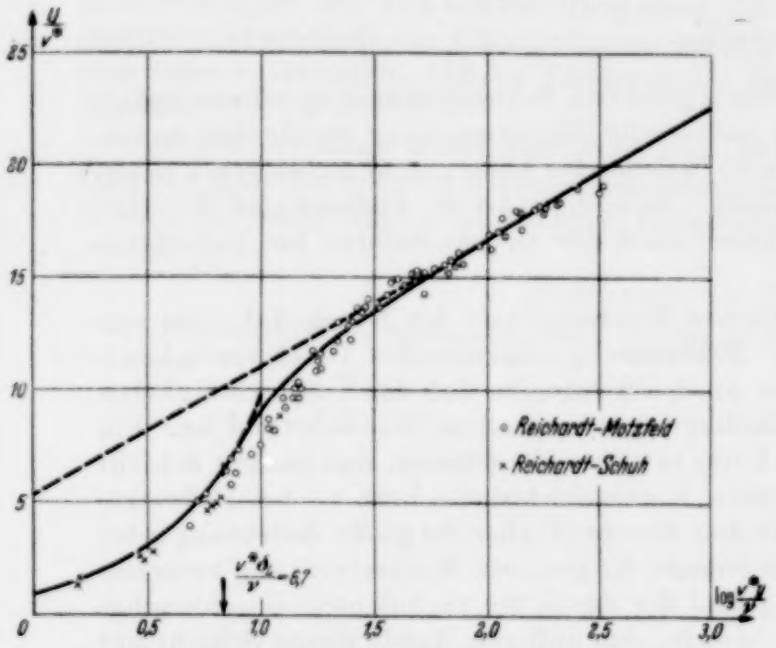


Abb. 1. Geschwindigkeitsprofil nach (4a) und (4b) für die glatte Wand mit $v^* \delta_L / \nu = 6{,}7$, $\varkappa = 0{,}4$. Versuchspunkte nach *H. Reichardt*.

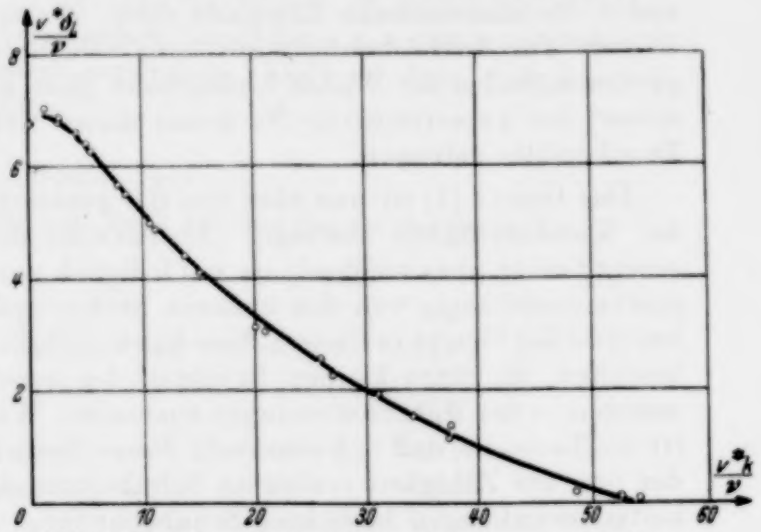


Abb. 2. Einfluß schwacher Wandrauhigkeit auf die Dicke δ_L der laminaren Unterschicht nach Versuchsergebnissen von *J. Nikuradse*.

anzusehenden Wänden. Für große y-Werte hat (4b) die bekannte asymptotische Form

$$U = v^* \left(\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} + C \right) \tag{6}$$

mit

$$C = \frac{1}{\varkappa} (\ln 4\varkappa - 1) + \frac{v^* \delta_L}{\nu}. \tag{7}$$

Bei rauhen Wänden sind die Verhältnisse bezüglich der Randbedingungen weniger übersichtlich. Man wird auch hier eine Bezugsebene für den Wandabstand y definieren, in der die Geschwindigkeit U im Mittel verschwindet. Die Lage dieser Ebene, die sich vermutlich nur wenig unterhalb der größten Erhebungen befindet, ist nicht genau bekannt; sie ist aber hier auch nicht so sehr wichtig. Eine kleine Wandrauhigkeit hat nun zur Folge, daß die Strömung in der laminaren Schicht wellig wird; dieses begünstigt die Entstehung der Turbulenz. Praktisch wirkt sich dies in einer Abnahme der Dicke δ_L der laminaren Unterschicht aus. In Abb. 2 ist die diesbezügliche Auswertung der Meßergebnisse von *J. Nikuradse*[3] an Rohren mit sandrauhen Wänden wiedergegeben; k ist die Korngröße der Rauhigkeiten. Die Dicke δ_L fällt mit wachsendem k ab, bis sich etwa für $v^* k / \nu = 54$ der Wert $\delta_L = 0$ ergibt.

[1] Diese Annahme wurde auch in einer Arbeit von *H. B. Squire*, Phil. Mag. (7) 39 (1948), S. 7, gemacht; jedoch wurde dort ein von (3) abweichender Ausdruck für die Schubspannung benutzt. Der berechnete Geschwindigkeitsverlauf weicht nur wenig von dem hier erhaltenen ab.

[2] *H. Reichardt*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 297.

[3] *J. Nikuradse*, Strömungsgesetze in rauhen Rohren. VDI-Forschungsheft 361 (1933).

Für noch größere Rauhigkeiten besteht dann keine laminare Unterschicht mehr, sondern die Turbulenzintensität hat schon in der Ebene $y = 0$, in welcher der Mittelwert der Geschwindigkeit U verschwindet, eine endliche Größe. Bei sehr großen Rauhigkeiten ist diese Intensität bei $y = 0$ schließlich so stark, daß die Zähigkeit überhaupt keinen Einfluß mehr hat. Man darf wohl annehmen, daß in diesem Fall an den einzelnen Bergen und Tälern der Wand unmittelbar Ablösung der Strömung eintritt. In (3) wird dieser Sachverhalt dadurch ausgedrückt, daß der Mischungsweg für $y = 0$ eine endliche, von der Rauhigkeit abhängige Größe l_0 hat. An Stelle von (5) ist dann

$$l = l_0 + \varkappa y \tag{8}$$

zu setzen. Hiermit ergibt die Integration von (3) mit $U = 0$ für $y = 0$

$$U = v^* \left\{ \frac{\nu}{\varkappa v^* l} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{v^* l}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right] - \frac{\nu}{\varkappa v^* l_0} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{v^* l_0}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right] + \frac{1}{\varkappa} \ln \left[\frac{\frac{v^* l}{\nu} + \sqrt{\left(\frac{v^* l}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}}}{\frac{v^* l_0}{\nu} + \sqrt{\left(\frac{v^* l_0}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}}} \right] \right\}. \tag{9}$$

Nach den zitierten Messungen von *J. Nikuradse* an sandrauhen Rohren ist, wie Abb. 3 zeigt, der Anfangswert l_0 von k linear abhängig; für $v^* k/\nu \geqq 54$ gilt

$$\frac{v^* l_0}{\nu} = -0{,}76 + 0{,}014 \frac{v^* k}{\nu}. \tag{10}$$

Auch die Gleichung (9) geht für große y-Werte in die Form (6) über, wobei jetzt

$$C = \frac{1}{\varkappa}(\ln 4\varkappa - 1) - \frac{\nu}{\varkappa v^* l_0}\left[\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{v^* l_0}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}}\right] - \frac{1}{\varkappa} \ln \left[2 \frac{l_0 v^*}{\nu} + 2 \sqrt{\left(\frac{v^* l_0}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right] \tag{11}$$

ist. Führt man hierin $v^* l_0/\nu$ nach (10) ein, so wird man für sehr große $v^* k/\nu$-Werte auf die von *L. Prandtl* angegebene Beziehung

$$U = v^* \left(\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y}{k} + C_2 \right) \tag{12}$$

geführt, wobei sich in unserem Fall $C_2 = 8{,}37$ ergibt. Die Form ist ganz unabhängig von der Zähigkeit.

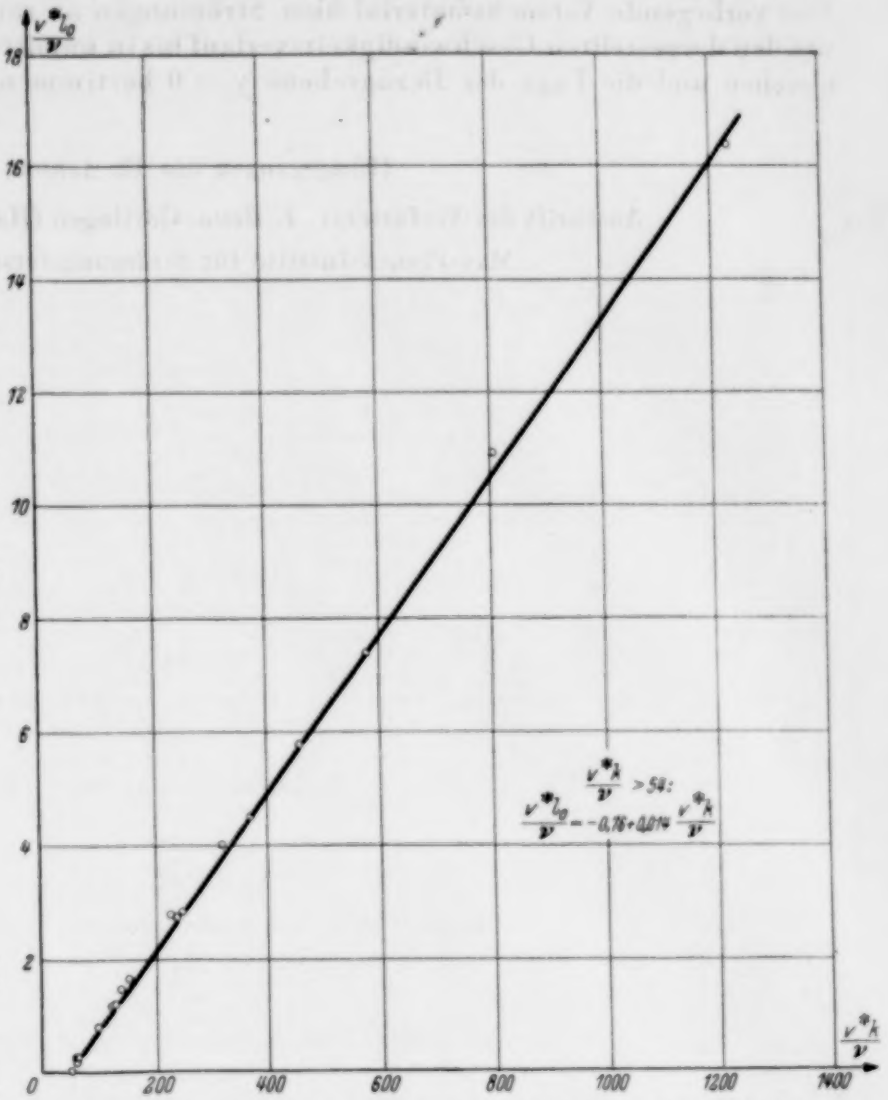


Abb. 3. Anfangswert für den Mischungsweg bei starker Wandrauhigkeit nach Versuchsergebnissen von *J. Nikuradse*.

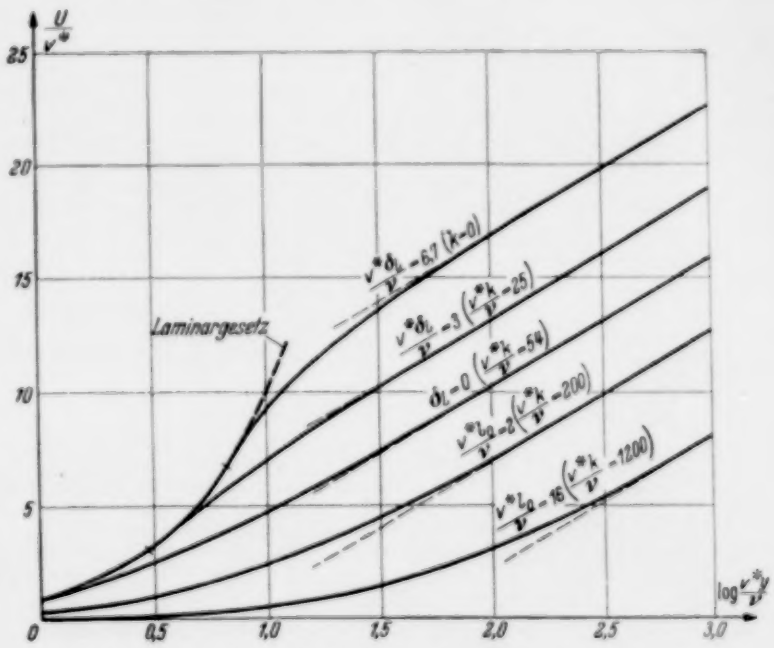


Abb. 4. Berechnete Geschwindigkeitsprofile für verschieden rauhe Wände mit $\varkappa = 0{,}4$.

Zum Abschluß dieser Ausführungen sind in Abb. 4 die aus (4a), (4b) und (9) errechneten Geschwindigkeitsgesetze für verschieden rauhe Wände zum Vergleich miteinander aufgetragen. Das vorliegende Versuchsmaterial über Strömungen an rauhen Wänden reicht leider nicht aus, um den dargestellten Geschwindigkeitsverlauf bis in unmittelbare Wandnähe mit Messungen vergleichen und die Lage der Bezugsebene $y = 0$ bestimmen zu können.

(Eingegangen am 12. Januar 1950.)

Anschrift des Verfassers: *J. Rotta*, Göttingen (Hannov.), Böttingerstr. 6/8.
Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Göttingen.

Vor kurzem erschienen:

Einführung in die Akustik

Von

Dr. phil. Ferdinand Trendelenburg
Honorar-Professor an der Universität Freiburg i. Br.

Zweite, umgearbeitet Auflage

Mit 280 Abbildungen. VIII, 378 Seiten. 1950. Ganzleinen DMark 39.—

Inhaltsübersicht:

I. Grundlegende Fragen der Schwingungslehre und der Wellenlehre: Einfache Schwingungen. Zusammengesetzte Schwingungen. Fourierdarstellung. Lissajousschwingungen. Freie und erzwungene Schwingungen (Systeme von einem Freiheitsgrad). Schwingungen von Systemen mit nichtlinearen Eigenschaften. Koppelungsschwingungen (Systeme von mehreren Freiheitsgraden). Selbsterregte Schwingungen. Wellengleichung. Die verschiedenen Wellenarten. Eigenschwingungen von Luftsäulen, Saiten, Membranen, Stäben. Einfluß einer Bewegung von Schallquelle oder Schallempfänger. Dopplereffekt. — **II. Schallfeldgrößen und ihre Messung:** Schalldruck, Bewegung, Schnelle, Temperaturschwankung, Dichteschwankung. Frequenz, Wellenlänge, Schallgeschwindigkeit. Schallstärke, Schallleistung. Lautstärke. — **III. Schallerzeugung:** Grundlegende theoretische Bemerkungen zur Schallabstrahlung. Mechanische Schallsender, Musikinstrumente. Die menschliche Stimme. Elektrische Schallsender. Thermische Schallsender. — **IV. Schallausbreitung:** Schallgeschwindigkeit. Huygens'sches Prinzip, Reflexion, Beugung, Brechung. Schallabsorption. Vorgänge, in geschlossenen akustischen Systemen (Resonatoren, Filter, Leitungen). Raum- und Bauakustik. — **V. Schallempfang und Schallaufzeichnung:** Wirkungsweise und Bauart technischer Schallempfänger. Gerichteter Schallempfang. Eichung von Schallempfänger. Das Ohr als Schallempfänger. Schallaufzeichnung. — **VI. Schallanalyse. Physikalische Eigenschaften natürlicher Schallvorgänge:** Verfahren zur Schallanalyse. Physkalische Eigenschaften natürlicher Schallvorgänge. — **VII. Anhang:** Benennungen in der Akustik. Zusammenstellung praktisch wichtiger akustischer Formeln. — **Sachverzeichnis.**

Für die zweite Auflage der „Einführung in die Akustik" wurde die Einteilung des Stoffes beibehalten. Am ersten die grundlegenden Fragen der Schwingungs- und Wellenlehre behandelnden Abschnitt brauchte naturgemäß nur wenig geändert zu werden. Alle übrigen Abschnitte des Buches wurden im Hinblick auf die schnelle Weiterentwicklung, die die Akustik seit Erscheinen der ersten Auflage genommen hat, weitgehend umgearbeitet und ergänzt. Eine Reihe von Abschnitten wurde praktisch völlig neu geschrieben.

Der Kreisel

Seine Theorie und seine Anwendungen

Von

Dr. R. Grammel
o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart

Zweite, neubearbeitete Auflage

Erster Band:

Die Theorie des Kreisels

Mit 137 Abbildungen. XI, 281 Seiten. 1950. DMark 30.—; Ganzleinen DMark 33.—

Inhaltsübersicht:

Einleitung. — **Grundlagen:** Grundlagen der Vektorrechnung. — Grundlagen der Mechanik. — Der Trägheitstensor. — **Der symmetrische Kreisel:** Der kräftefreie symmetrische Kreisel. — Die geführte Bewegung des symmetrischen Kreisels. — Der symmetrische Kreisel unter Zwang und Stoß. — Der schwere symmetrische Kreisel. — Der Einfluß der Reibung. — **Der unsymmetrische Kreisel:** Der kräftefreie unsymmetrische Kreisel. — Der schwere unsymmetrische Kreisel. — **Besondere Probleme:** Kreisel im erweiterten Sinne. Gyroskopische Systeme. — **Darstellung der Kreiselbewegungen durch Thetafunktionen.** — Namen- und Sachverzeichnis.

Im September erscheint:

Zweiter Band:

Die Anwendungen des Kreisels

Mit 133 Abbildungen. Etwa 240 Seiten. DMark 30.—; Ganzleinen DMark 33.—

Inhaltsübersicht:

Kreiselwirkung bei Radsätzen. Kollermühlen. Kritische Drehzahlen von Rotoren. Fahrzeuge (Bahnen, Kraftfahrzeuge, Schiffe, Zweirad). Flugzeuge. — **Kreiselgeräte.** Kompaßkreisel (Gyroskop, Inklinations- und Deklinationskreisel). Kreiselkompasse (Einkreiselkompaß, Mehrkreiselkompasse). Künstliche Horizonte (Kreiselpendel, Pendelkreisel). Wende- und Lagekreisel (Wendezeiger, Kurskreisel, Richtkreisel, Stützkreisel). Sonstige Kreiselgeräte (Differentiir- und Integrierkreisel, Reglerkreisel). — **Unmittelbare Stabilisatoren.** Richtkreisel (Erde, geworfene Körper), Stützkreisel (Einschienenbahnen, Geradläufer). Dämpfkreisel (Schiffskreisel).

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschienen:

Integraltafeln

Sammlung unbestimmter Integrale elementarer Funktionen

Von

Dr.-Ing. W. Meyer zur Capellen
Aachen

VIII, 292 Seiten. 1950. Ganzleinen DMark 36.—

Inhaltsübersicht:

Vorbemerkungen: Regeln zum Integrieren. — Regeln zum Differenzieren. — Weitere Hilfsmittel zur Integration. — Zum Gebrauch der Tafeln. — **Integrale algebraischer Funktionen:** Integrale rationaler Funktionen. — Integrale irrationaler Funktionen. Integrale algebraischer Funktionen, die auf elliptische Integrale führen. — **Integrale transzendenter Funktionen:** Exponentialfunktion und Logarithmus. — Integrale trigonometrischer und zyklometrischer Funktionen. — Hyperbel- und Area-Funktionen. — **Produkte algebraischer und transzendenter Funktionen:** Exponentialfunktion und Logarithmus. — Trigonometrische und zyklometrische Funktionen. — Hyperbel- und Area-Funktionen. — **Produkte transzendenter Funktionen untereinander:** Integrale von der Form $\int g(x) \ln x \, dx$. — Integrale von der Form $\int e^x g(x) \, dx$. — **Zusammenstellung einiger wichtiger Konstanten, Reihen und Funktionen.** — **Schrifttum.**

Für die Auswahl der gebrachten Integrale — es dürften rund 3000 sein — war maßgebend, daß der Benutzer einerseits fertige Integrale findet, andererseits auch Rekursions- oder Hilfsformeln, mit denen er weiterarbeiten kann. Solche Formeln wurden aber trotzdem für einzelne Sonderfälle ausgewertet, damit der Benutzer die Anwendung kennenlernt.

Einteilung und Aufbau erfolgten ausschließlich aus dem Gesichtspunkt des praktischen Gebrauches, d. h. der Benutzer, auch wenn er mathematisch nicht sehr geschult ist, soll möglichst schnell das gesuchte Integral finden. Daher wurde, wie die Überschriften und das Inhaltsverzeichnis zeigen, sehr weitgehend unterteilt, und zwar so, daß die Überschrift einen Hinweis auf den Ort des Integrals gibt. — Zum Differenzieren kann die Tafel ebenfalls benutzt werden, die Formeln sind dann nur von rechts nach links zu lesen.

Das kurze Schrifttumsverzeichnis enthält die wichtigste benutzte und die im Hauptteil angezogene Literatur.

Matrizen

Eine Darstellung für Ingenieure

Von

Dr.-Ing. Rudolf Zurmühl

Mit 25 Abbildungen. XV, 427 Seiten. 1950. Ganzleinen DMark 29.50

Inhaltsübersicht:

1. Einleitung. — I. Kapitel: **Der Matrizenkalkül:** 2. Grundbegriffe und einfache Rechenregeln. 3. Matrizen und Vektoren. 4. Matrizenmultiplikation. 5. Kehrmatrix und Matrizendivision. 6. Lineare Transformationen. 7. Orthogonale Transformation. — II. Kapitel: **Der Rang:** 8. Determinanten. 9. Lineare Abhängigkeit und Rang. 10. Theorie der linearen Gleichungen. 11. Äquivalenz und Rangbestimmung. — III. Kapitel: **Formen und Transformationen:** 12. Bilineare und quadratische Formen. 13. Koordinatentransformationen. — IV. Kapitel: **Das Eigenwertproblem:** 14. Charakteristische Zahlen und Eigenvektoren. 15. Symmetrische Matrizen. 16. Allgemeinere Eigenwertprobleme. 17. Komplexe Matrizen. — V. Kapitel: **Struktur der Matrix:** 18. Die Minimumgleichung. 19. Elementarteiler, Klassifikation. 20. Die Normalform. 21. Hauptvektoren. Transformation auf Normalform. 22. Matrizenfunktionen und Matrizengleichungen. — VI. Kapitel: **Numerische Verfahren:** 23. Auflösung linearer Gleichungssysteme durch Matrizenmultiplikation. 24. Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme. 25. Iterative Bestimmung der größten charakteristischen Zahl. 26. Bestimmung höherer Eigenwerte. VII. Kapitel: **Anwendungen:** 27. Matrizen in der Elektrotechnik. 28. Matrizen in der Schwingungstechnik. 29. Systeme linearer Differentialgleichungen. 30. Differentialmatrizen und nichtlineare Transformationen. 31. Tensoren. 32. Matrizen in der Ausgleichsrechnung. — **Sachverzeichnis.**

Die Lehre von den Matrizen ist eine Lehre von den linearen Beziehungen. Diese aber spielen in der gesamten mathematischen Naturbeschreibung und dementsprechend auch in der Ingenieurwissenschaft eine hervorragende Rolle. Es gibt kaum ein der Rechnung zugängliches Gebiet in Physik und Technik, in dem man nicht mehr oder weniger zwangsläufig auf Beziehungen linearer Art geführt wird.

In den Matrizen hat sich die lineare Algebra ein Ausdrucksmittel von ganz besonderer Anpassungsfähigkeit geschaffen. Mit ihrer Hilfe werden einheitlich faßbare, in der gewöhnlichen Formelsprache jedoch nur schwerfällig darstellbare Operationen durch Formeln von unübertrefflicher Kürze und Sinnfälligkeit wiedergegeben, die den Blick stets auf das Wesentliche lenken. Die Matrizenrechnung ist daher in besonderer Weise geeignet, die so vielgestaltige Welt der linearen Transformationen auch dem Nichtmathematiker und Ingenieur zu erschließen.

Das vorliegende Buch wendet sich demgemäß nach Darstellungsart, Aufbau und Stoffauswahl an den Ingenieur, und zwar ganz besonders auch an jenen, der nicht über eine mathematische Sonderausbildung verfügt.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

(57 273/4022) Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. K.B./Z. 040.